Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT

75. BAND, 2. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 23. JANUAR 1961)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1961

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp, E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht das Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e.V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0.30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z.B. die Landauschen Symbole *o* und *O*, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Math. Inst. d. Universität, Portania.
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,
H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21b.

Springer-Verlag OHG

Berlin-Wilmersdorf, Heidelberger Platz 3, Fernsprecher 830301, Fernschreibnummer 01-83319
Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 28/30, Fernsprecher 27901, Fernschreibnummer 04-61723
Göttingen, Weender Straße 60.

---

75. Band — **Inhalt** — 2. Heft

Seite

Tamaschke, O., Die Kongruenzrelationen im Verband der zugänglichen Subnormalteiler 115

Itô, N., Zur Theorie der transitiven Gruppen vom Grad p. II 127

Carter, R. W., Nilpotent self-normalizing subgroups of soluble groups 136

Huppert, B., Gruppen mit modularer Sylow-Gruppe 140

Schäfke, F. W., Reihenentwicklungen analytischer Funktionen nach Biorthogonalsystemen spezieller Funktionen. II 154

Meulenbeld, B., The generalized Legendre functions with special relations between the parameters 192

Sioson, F. M., Some primal Clusters 201

Tamaschke, O., Gruppen mit reduziblem Subnormalteilerverband 211

TAMASCHKE, O.
Math. Zeitschr. 75, 115–126 (1961)

Die Kongruenzrelationen im Verband der zugänglichen Subnormalteiler

Herrn HELMUT WIELANDT zum 50. Geburtstag am 19. Dezember 1960 gewidmet

Von

OLAF TAMASCHKE

Eine Untergruppe $\mathfrak{A}$ einer Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt *subnormal* in $\mathfrak{G}$ oder *Subnormalteiler* von $\mathfrak{G}$, wenn eine endliche Normalkette $\mathfrak{G}=\mathfrak{A}_0 \trianglerighteq \mathfrak{A}_1 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq \mathfrak{A}_r=\mathfrak{A}$ existiert. Eine subnormale Untergruppe $\mathfrak{B}$ nennen wir *zugänglich*, wenn es eine endliche Kompositionskette $\mathfrak{G}=\mathfrak{B}_0 \cdot \triangleright \mathfrak{B}_1 \cdot \triangleright \cdots \cdot \triangleright \mathfrak{B}_s=\mathfrak{B}$ gibt. $\mathfrak{A} \cdot \triangleright \mathfrak{B}$ bedeutet: $\mathfrak{B}$ ist maximaler Normalteiler von $\mathfrak{A}$. Die Menge $\mathrm{zs}\mathfrak{G}$ aller zugänglichen Subnormalteiler einer beliebigen Gruppe $\mathfrak{G}$ ist ein Teilverband des Verbandes $\mathrm{u}\mathfrak{G}$ aller Untergruppen von $\mathfrak{G}$ (WIELANDT [6]). Hingegen bildet die Menge $\mathrm{s}\mathfrak{G}$ aller Subnormalteiler von $\mathfrak{G}$ nur unter zusätzlichen Voraussetzungen einen Teilverband von $\mathrm{u}\mathfrak{G}$, z.B. dann, wenn in $\mathrm{s}\mathfrak{G}$ die Maximalbedingung erfüllt ist (WIELANDT [6]). Genau dann ist $\mathrm{zs}\mathfrak{G}=\mathrm{s}\mathfrak{G}$, wenn $\mathfrak{G}$ eine endliche Kompositionsreihe besitzt.

Im ersten Abschnitt stellen wir verbandstheoretische Hilfsmittel bereit. Wir beweisen sodann, daß $\mathrm{zs}\mathfrak{G}$ ein submodularer längenendlicher Verband ist (2.4). Daher bestimmen die Mengen von Klassen projektiver Kompositionsfaktorgruppen umkehrbar eindeutig die Kongruenzrelationen in $\mathrm{zs}\mathfrak{G}$, das sind die mit den Verknüpfungen $\cap$ (Durchschnitt) und $\cup$ (Erzeugnis) von $\mathrm{zs}\mathfrak{G}$ verträglichen Äquivalenzrelationen (2.5).

Unter der Voraussetzung $\mathrm{zs}\mathfrak{G}=\mathrm{s}\mathfrak{G}$ geben wir einen Überblick darüber, wie die Klassen projektiver Kompositionsfaktorgruppen in $\mathrm{s}\mathfrak{G}$ eingelagert sind [3. Abschnitt, vor allem (3.4) und (3.5)] und wie sich die größten und die kleinsten Subnormalteiler in den Kongruenzklassen von $\mathrm{s}\mathfrak{G}$ bei Automorphismen von $\mathfrak{G}$ verhalten (4.2). Die erste dieser beiden Fragen hängt zum Teil mit Untersuchungen von O.-H. KELLER [2] über die Vertauschbarkeit von Kompositionsfaktorgruppen zusammen, die letztere umfaßt die Frage nach den Invarianzeigenschaften des unteren und des oberen Kerns einer Kongruenzrelation in $\mathrm{s}\mathfrak{G}$ [(4.4) und (4.5)].

Ich danke Herrn Professor WIELANDT für die Anregung zu dieser Arbeit.

1. Der Satz von Jordan-Hölder in halbmodularen Verbänden

Wir betrachten längenendliche Verbände L, d.h. jede Kette zwischen irgend zwei Elementen $a \geqq b$ von L habe endliche Länge. Unter einem Primquotienten a/b von L verstehen wir ein Paar benachbarter Elemente $a \cdot > b$ (a ist

oberer Nachbar von b). In der Menge K_L aller Primquotienten von L führen wir Relationen ein:

Zwei Primquotienten a/b und c/d heißen *transponiert* (in Zeichen: $a/b\,\tau\,c/d$), wenn ($a=b\cup c$ *und* $d=b\cap c$) oder ($c=a\cup d$ *und* $b=a\cap d$) gilt; sie heißen *projektiv* (in Zeichen: $a/b\,\pi\,c/d$), wenn es eine Kette transponierter Primquotienten gibt, die a/b mit c/d verbindet. π ist eine Äquivalenzrelation in K_L.

Zwei Primquotienten a/b und c/d stehen genau dann in der Relation $a/b\,\varrho\,c/d$, wenn die Gleichungen

$$\text{(I)} \qquad b\cup(c\cap a)=a, \qquad b\cup(d\cap a)=b,$$

$$\text{(II)} \qquad d\cup(a\cap c)=c, \qquad d\cup(b\cap c)=d$$

erfüllt sind.

[Wie Herr VL. KOŘÍNEK mir mitteilte, wurde die Relation ϱ von L. JÁNOŠ in einer russisch veröffentlichten Arbeit "Properties of the ZASSENHAUS' refinement", Czechoslovak mathematical Journal 3, 159—180 (1953), eingehend untersucht.]

(1.1) *Aus* $a/b\,\tau\,c/d$ *folgt* $a/b\,\varrho\,c/d$ *und aus* $a/b\,\varrho\,c/d$ *folgt* $a/b\,\pi\,c/d$.

BEWEIS. Die erste Behauptung ist leicht nachzurechnen. Wir setzen $a/b\,\varrho\,c/d$ voraus. An den jeweils ersten Gleichungen von (I) und (II) lesen wir $a\cap c\leqq b$ und $a\cap c\leqq d$ ab. Die zweiten Gleichungen von (I) und (II) liefern $a\cap d\leqq b$ und $b\cap c\leqq d$, also $a\cap d=b\cap d=b\cap c$. Wir wählen ein $x\in L$ so, daß $b\cap d<\cdot\, x\leqq a\cap c$ gilt. Dann ist $a=b\cup x$ und $b\cap d=b\cap x$, also $a/b\,\tau\,x/b\cap d$. Genau so findet man $c/d\,\tau\,x/b\cap d$, zusammen also $a/b\,\pi\,c/d$.

Ein längenendlicher Verband ist genau dann nach unten halbmodular (lower semi-modular [*1*, S. 66 (ξ'')]), wenn seine Elemente die folgende Bedingung erfüllen:

($\underline{H}$) *Aus* $x\cup y\cdot>y$ *folgt* $x\cdot>x\cap y$.

Der folgende Satz ist von KOŘÍNEK [*3*, Main Theorem 4.4] mit einer Relation $\underset{s}{\sim}$ an Stelle von ϱ formuliert worden, wobei aus $a/b\,\varrho\,c/d$ stets $a/b\underset{s}{\sim}c/d$ folgt.

(1.2) SATZ. *Ein längenendlicher Verband L ist genau dann nach unten halbmodular, wenn die Primquotienten zweier beliebiger maximaler Ketten* $a=a_0\cdot>a_1\cdot>\cdots>a_m=b$ *und* $a=b_0\cdot>b_1\cdot>\cdots>b_n=b$ *zwischen irgend zwei Elementen* $a\geqq b$ *von L durch die Relation ϱ einander umkehrbar eindeutig zugeordnet werden (woraus insbesondere $m=n$ folgt).*

BEWEIS. 1. Es sei L halbmodular nach unten. Zu jedem $i=1,\ldots,m$ gibt es genau ein $k=1,\ldots,n$ derart, daß $a_{i-1}\cap b_{k-1}\leqq a_i$ und $a_{i-1}\cap b_k\leqq a_i$ gilt. Daraus folgen die Gln. (I) in der Form

$$a_i\cup(b_{k-1}\cap a_{i-1})=a_{i-1}, \qquad a_i\cup(b_k\cap a_{i-1})=a_i$$

und außerdem ist $a_{i-1}\cap b_k=a_i\cap b_k$. Dann ist auch $a_{i-1}\cap b_{k-1}\leqq b_k$, weil andernfalls $a_{i-1}\cap b_{k-1}=a_{i-1}\cap b_k=a_i\cap b_k\leqq a_i$ folgt, im Widerspruch zur Wahl von k. Daher gilt die erste Gl. (II): $b_k\cup(a_{i-1}\cap b_{k-1})=b_{k-1}$. Mit ($\underline{H}$) schließen wir aus $a_{i-1}=a_i\cup(b_{k-1}\cap a_{i-1})\cdot>a_i$ und $b_{k-1}=b_k\cup(a_{i-1}\cap b_{k-1})\cdot>b_k$ auf $a_{i-1}\cap b_{k-1}$

$\cdot > a_i \cap b_{k-1} \geqq a_i \cap b_k$ und $a_{i-1} \cap b_{k-1} \cdot > a_{i-1} \cap b_k = a_i \cap b_k$. Mithin ist $a_i \cap b_{k-1} = a_i \cap b_k \leqq b_k$ und es gilt die zweite Gl. (II): $b_k \cup (a_i \cap b_{k-1}) = b_k$. Daraus folgt $a_{i-1}/a_i \varrho\, b_{k-1}/b_k$. Außerdem ist wegen $a_{i-1} \cap b_{k-1} \leqq b_k$, $a_i \cap b_{k-1} \leqq b_k$ die Zahl i durch k in der gleichen Weise eindeutig bestimmt, wie k durch i. Die Zuordnung der Primquotienten ist umkehrbar eindeutig und wird durch die Relation ϱ geliefert.

2. Um die Umkehrung zu beweisen, setzen wir $x \cup y \cdot > y$ voraus. Wir betrachten zwei maximale Ketten $x \cup y \cdot > y \cdot > \cdots > x \cap y$ und $x \cup y \cdot > \cdots \cdot > x \cdot > \cdots > a \cdot > b \cdot > \cdots > x \cap y$. Nach Voraussetzung gibt es in der ersten Kette einen Primquotienten $c/d \varrho\, a/b$. Im Falle $c \leqq y$ folgt aus der ersten Gl. (I) $a = b \cup (c \cap a) \leqq b \cup (y \cap a) = b$ im Widerspruch zu $a \cdot > b$. Also kommt c/d nicht in der Kette von y nach $x \cap y$ vor, d.h. $c/d = x \cup y/y$. Daher gilt $x \cup y/y \varrho\, a/b$ für jeden Primquotienten a/b zwischen x und $x \cap y$. Nach Voraussetzung ist die Zuordnung der Primquotienten in den beiden Ketten umkehrbar eindeutig. Mithin tritt in der Kette $x \cdot > \cdots > x \cap y$ nur ein Primquotient auf. Es ist $x \cdot > x \cap y$. In L gilt ($\underline{H}$) und daher ist L halbmodular nach unten.

2. Der Hauptsatz über die Kongruenzrelationen in zs$\mathfrak{G}$

Die Primquotienten im Verband zs$\mathfrak{G}$ sind die Kompositionsfaktorgruppen von $\mathfrak{G}$. $K_{\mathrm{zs}\,\mathfrak{G}}$ ist die Menge der zugänglichen Kompositionsfaktorgruppen von $\mathfrak{G}$. Wir beachten, daß projektive Kompositionsfaktorgruppen isomorph sind.

(2.1) *Im Verband* zs$\mathfrak{G}$ *gilt* ($\underline{H}$). zs$\mathfrak{G}$ *ist ein nach unten halbmodularer längenendlicher Verband.*

Beweis. Aus $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} \cdot \rhd \mathfrak{B}$ folgt $\mathfrak{A} \cdot \rhd \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, weil $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}/\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}/\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}/\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ gilt.

zs$\mathfrak{G}$ ist halbmodular nach oben genau dann, wenn zs$\mathfrak{G}$ modular ist [*1*, S. 68 Theor. 3]. An Stelle der Halbmodularität nach oben gelten im allgemeinen Falle schwächere Aussagen in zs$\mathfrak{G}$.

(2.2) *Es seien* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *zugängliche Subnormalteiler von* $\mathfrak{G}$ *mit* $\mathfrak{A} \cdot \rhd \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$. *Ist* $\mathfrak{A}/\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ *nichtabelsch, so folgt* $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} \cdot \rhd \mathfrak{B}$, *also* $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}/\mathfrak{B}\ \tau\ \mathfrak{A}/\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$.

Beweis. Wir setzen $\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$. Es sei M die Menge der $\mathfrak{S} \in \mathrm{zs}\,\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{S} < \mathfrak{H}$, mit der Eigenschaft, daß $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{B}$ ein maximaler Normalteiler von $\mathfrak{S}$ ist. M enthält $\mathfrak{A}$, ist also nicht leer. In zs$\mathfrak{G}$ gilt die Maximalbedingung. Wir wählen eine in M maximale Untergruppe $\mathfrak{M}$ aus. $\mathfrak{N}$ sei eine zugängliche subnormale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{B} \lhd \cdot\, \mathfrak{N} \leqq \mathfrak{B}$. Es ist $\mathfrak{M}/\mathfrak{M} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{A}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{B})/\mathfrak{M} \cap \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}/\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ eine nichtabelsche einfache Gruppe. Außerdem ist $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{B}$ normal in $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}/\mathfrak{M} \cap \mathfrak{B}$ besitzt eine endliche Kompositionsreihe. Folglich sind $\mathfrak{M}/\mathfrak{M} \cap \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{N}/\mathfrak{M} \cap \mathfrak{B}$ elementweise vertauschbar [*6*, (19)] und es ist $\mathfrak{M}\mathfrak{N}/\mathfrak{M} \cap \mathfrak{B} \cong \mathfrak{M}/\mathfrak{M} \cap \mathfrak{B} \times \mathfrak{N}/\mathfrak{M} \cap \mathfrak{B}$. Also ist $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{B}$ maximaler Normalteiler von $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{M}\mathfrak{N}$. Wegen der Maximalitätseigenschaft von $\mathfrak{M}$ muß $\mathfrak{M}\mathfrak{N} = \mathfrak{H}$, $\mathfrak{N} = \mathfrak{B} \lhd \cdot\, \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ sein, womit die Behauptung bewiesen ist.

(2.3) *Es seien* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *zugängliche Subnormalteiler von* $\mathfrak{G}$ *mit* $\mathfrak{A} \cdot \triangleright \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$. *Ist* $\mathfrak{A}/\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ *abelsch, so ist jede Kompositionsfaktorgruppe zwischen* $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ *und* $\mathfrak{B}$ *projektiv zu* $\mathfrak{A}/\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$.

BEWEIS. Es sei $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} = \mathfrak{H}_0 \cdot \triangleright \mathfrak{H}_1 \cdot \triangleright \cdots \cdot \triangleright \mathfrak{H}_r = \mathfrak{B}$ eine beliebige Kompositionskette von $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ bis $\mathfrak{B}$. Jede Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{H}_{i-1}/\mathfrak{H}_i$ ist isomorph zu $\mathfrak{A}/\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ ([6, (9)] gilt auch in zs$\mathfrak{G}$, oder man benütze [10, S. 195 Theor. 21]). In einer Kompositionskette $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} \cdot \triangleright \cdots \cdot \triangleright \mathfrak{A} \cdot \triangleright \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ gibt es zu jedem $i = 1, \ldots, r$ eine Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{L}_i/\mathfrak{M}_i$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{H}_{i-1}/\mathfrak{H}_i \varrho \mathfrak{L}_i/\mathfrak{M}_i$ [(2.1) und (1.2)]. Ist $\mathfrak{L}_i = \mathfrak{A}$ und also $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, so folgt $\mathfrak{H}_{i-1}/\mathfrak{H}_i \pi \mathfrak{A}/\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$. Andernfalls ist $\mathfrak{L}_i \cap \mathfrak{H}_1$ ein maximaler Normalteiler von $\mathfrak{L}_i$, der $\mathfrak{A}$ nicht enthält. Folglich gilt $\mathfrak{L}_i = \mathfrak{A} \cup (\mathfrak{L}_i \cap \mathfrak{H}_1)$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cap (\mathfrak{L}_i \cap \mathfrak{H}_1)$ und daher $\mathfrak{L}_i/\mathfrak{L}_i \cap \mathfrak{H}_1 \tau \mathfrak{A}/\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$. Es ist $\mathfrak{L}_i/\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{H}_1$ eine elementarabelsche Gruppe vom Typ (p, p), $p = |\mathfrak{A}/\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}|$. Sie enthält eine von $\mathfrak{M}_i/\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{L}_i \cap \mathfrak{H}_1/\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{H}_1$ verschiedene Untergruppe $\mathfrak{N}/\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{H}_1$ der Ordnung p. Es folgt $\mathfrak{L}_i/\mathfrak{M}_i \tau \mathfrak{N}/\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{H}_1 \tau \mathfrak{L}_i/\mathfrak{L}_i \cap \mathfrak{H}_1$. Daher gilt $\mathfrak{H}_{i-1}/\mathfrak{H}_i \pi \mathfrak{A}/\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ $(i = 1, \ldots, r)$.

Wir fassen diese Ergebnisse zusammen:

(2.4) SATZ. zs$\mathfrak{G}$ *ist ein submodularer längenendlicher Verband* [5].

Die Menge aller Klassen $\mathfrak{p}$ projektiver Kompositionsfaktorgruppen aus $K_{\mathrm{zs}\,\mathfrak{G}}$ bezeichnen wir mit $K_{\mathrm{zs}\,\mathfrak{G}}/\pi$. Dann folgt aus [5, Satz 1]:

(2.5) HAUPTSATZ. *Der Verband aller Kongruenzrelationen in* zs$\mathfrak{G}$ *ist isomorph zum Verband* $\mathfrak{P}(K_{\mathrm{zs}\,\mathfrak{G}}/\pi)$ *aller Teilmengen von* $K_{\mathrm{zs}\,\mathfrak{G}}/\pi$: *Zu jeder Teilmenge* $\mathsf{B} \subseteq K_{\mathrm{zs}\,\mathfrak{G}}/\pi$ *gibt es genau eine Kongruenzrelation* $\varkappa_{\mathsf{B}}$ *in* zs$\mathfrak{G}$, *die alle Klassen* $\mathfrak{p} \in \mathsf{B}$ *und nur diese „annulliert" (d.h. aus* $\mathfrak{A}/\mathfrak{B} \in \mathfrak{p}$ *folgt* $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \pmod{\varkappa_{\mathsf{B}}}$), *auf diese Weise erhält man alle Kongruenzrelationen in* zs$\mathfrak{G}$ *und es gilt* $\varkappa_{\mathsf{B} \cap \Gamma} = \varkappa_{\mathsf{B}} \cap \varkappa_{\Gamma}$, $\varkappa_{\mathsf{B} \cup \Gamma} = \varkappa_{\mathsf{B}} \cup \varkappa_{\Gamma}$ *für alle* B, $\Gamma \subseteq K_{\mathrm{zs}\,\mathfrak{G}}/\pi$.

3. Die Klassen projektiver Kompositionsfaktorgruppen

Um zu abgerundeten Ergebnissen zu gelangen, setzen wir von nun an stets zs$\mathfrak{G}$ = s$\mathfrak{G}$ voraus, d.h. $\mathfrak{G}$ besitze eine endliche Kompositionsreihe. Einige der folgenden Aussagen, zu deren Beweis die Minimalbedingung nicht benützt wird, gelten allgemein in zs$\mathfrak{G}$ bei beliebigem $\mathfrak{G}$. Wir untersuchen, wie unter der genannten Voraussetzung die Klassen projektiver Kompositionsfaktorgruppen von $\mathfrak{G}$ in s$\mathfrak{G}$ eingelagert sind.

(3.1) *Die Relation* π *ist mit allen Automorphismen* σ *von* $\mathfrak{G}$ *verträglich*: *Es gilt* $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}\ \pi\ \mathfrak{H}/\mathfrak{K}$ *genau dann, wenn* $\mathfrak{A}^\sigma/\mathfrak{B}^\sigma\ \pi\ \mathfrak{H}^\sigma/\mathfrak{K}^\sigma$ *zutrifft.*

Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Definition von π. Ein Subnormalteiler $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$ heißt $\cap$-*reduzibel* in s$\mathfrak{G}$, wenn es Subnormalteiler $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{A}$ $\mathfrak{C} \neq \mathfrak{A}$ gibt mit $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$. Andernfalls nennen wir $\mathfrak{A}$ $\cap$-*irreduzibel* in s$\mathfrak{G}$ [1 S. 93]; dann ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{G}$ oder es gibt nur eine subnormale Untergruppe $\mathfrak{K}_{\mathfrak{A}}$ in der $\mathfrak{A}$ maximaler Normalteiler ist.

Ein Subnormalteiler $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$ heißt $\cup$-*reduzibel* in s$\mathfrak{G}$, wenn es Subnormalteiler $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{C} \neq \mathfrak{A}$ gibt mit $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}$. Sonst nennen wir $\mathfrak{A}$ $\cup$-*irreduzibel* in s$\mathfrak{G}$ [1, S. 20], es ist dann $\mathfrak{A} = 1$ oder $\mathfrak{A}$ besitzt genau einen maximalen Normalteiler $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$.

(3.2) *Zu jeder Kompositionsfaktorgruppe* $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ *von* $\mathfrak{G}$ *gibt es eine* $\cap$*-irreduzible Untergruppe* $\mathfrak{C} \in s\mathfrak{G}$ *und eine* $\cup$*-irreduzible Untergruppe* $\mathfrak{D} \in s\mathfrak{G}$, *die die Bedingungen* $\mathfrak{K}_\mathfrak{C}/\mathfrak{C}\ \pi\ \mathfrak{A}/\mathfrak{B}\ \pi\ \mathfrak{D}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$ *und* $\mathfrak{K}_\mathfrak{C} \geqq \mathfrak{A} \geqq \mathfrak{D}$, $\mathfrak{C} \geqq \mathfrak{B} \geqq \mathfrak{M}_\mathfrak{D}$ *erfüllen.*

Beweis. Unter den $\mathfrak{H} \in s\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ gibt es eine maximale Untergruppe $\mathfrak{C}$. Sie ist $\cap$-irreduzibel; denn ist $\mathfrak{C} \lhd \cdot\, \mathfrak{K} \in s\mathfrak{G}$, so folgt $\mathfrak{B} < \mathfrak{K} \cap \mathfrak{A} \leqq \mathfrak{A}$, also $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{K} = \mathfrak{A}\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{C} = \mathfrak{K}_\mathfrak{C}$ ist eindeutig bestimmt. Außerdem gilt $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ und damit $\mathfrak{K}_\mathfrak{C}/\mathfrak{C}\ \tau\ \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$.

Andererseits existiert unter den $\mathfrak{N} \in s\mathfrak{G}$, die nicht in $\mathfrak{B}$ enthalten sind, eine minimale Untergruppe $\mathfrak{D} \leqq \mathfrak{A}$. Sie ist $\cup$-irreduzibel; denn aus $\mathfrak{M} \lhd \cdot \mathfrak{D}$ folgt $\mathfrak{M} \leqq \mathfrak{B}$ und daher $\mathfrak{M} \leqq \mathfrak{B} \cap \mathfrak{D} < \mathfrak{D}$. Mithin ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{D} = \mathfrak{M}_\mathfrak{D}$ eindeutig bestimmt und es folgt $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \cup \mathfrak{D}$. Daher gilt $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}\ \tau\ \mathfrak{D}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$.

Der Aufbau der Äquivalenzklassen $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(\mathfrak{A}/\mathfrak{B}) \in K_{s\mathfrak{G}}/\pi$ hängt entscheidend davon ab, ob $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ abelsch oder nichtabelsch ist. Zunächst zu den abelschen Kompositionsfaktorgruppen. Es gilt der bemerkenswerte

(3.3) Satz von Suzuki [*4*, S. 70]. *Es sei* $\mathfrak{G}$ *eine* p*-Gruppe. Genau dann zerfällt* $K_{s\mathfrak{G}}$ *in mehr als eine Klasse projektiver Kompositionsfaktorgruppen (Genau dann besitzt* $s\mathfrak{G}$ *nichttriviale Kongruenzrelationen), wenn* $\mathfrak{G}$ *zyklisch von der Ordnung* $|\mathfrak{G}| > p$ *oder eine verallgemeinerte Quaternionengruppe ist.*

Beweis. (Fast den gleichen Beweis gibt D. W. Barnes in seiner Thesis "Lattice embeddings of prime power groups". Oxford 1959, S. 17.)

(a) Sei $\mathfrak{G}$ zyklisch von der Ordnung $|\mathfrak{G}| > p$ oder eine verallgemeinerte Quaternionengruppe. $\mathfrak{G}$ enthält genau eine Untergruppe $\mathfrak{P}$ der Ordnung p. Daher bildet $\mathfrak{P}/1$ für sich eine Klasse projektiver Kompositionsfaktorgruppen. Also zerfällt $K_{s\mathfrak{G}}$ in mindestens zwei verschiedene Klassen bezüglich π.

(b) Wir setzen voraus, daß $\mathfrak{G}$ weder zyklisch von der Ordnung $|\mathfrak{G}| > p$ noch eine verallgemeinerte Quaternionengruppe ist. Wir zeigen, daß $K_{s\mathfrak{G}} = \mathfrak{p}(\mathfrak{A}/\mathfrak{B})$ nur aus einer Klasse projektiver Kompositionsfaktorgruppen besteht. Es genügt nachzuweisen, daß je zwei Kompositionsfaktorgruppen einer Kompositionsreihe $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_0 \cdot \rhd\, \mathfrak{A}_1 \cdot \rhd \cdots \cdot \rhd\, \mathfrak{A}_n = 1$ projektiv sind. Denn ist $\mathfrak{A}/\mathfrak{B} \in K_{s\mathfrak{G}}$, so gibt es genau ein $k = 1, \ldots, n$ derart, daß $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}\ \varrho\ \mathfrak{A}_{k-1}/\mathfrak{A}_k$ gilt [(1.2) und (2.1)]. Für $|\mathfrak{G}| = p$ ist die Behauptung trivial.

Wir nehmen den Fall vorweg, daß $\mathfrak{G}$ eine elementarabelsche Gruppe vom Typ (p, p) ist. $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ seien drei verschiedene Untergruppen der Ordnung p. Es gilt $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}_1\ \tau\ \mathfrak{P}_2/1\ \tau\ \mathfrak{G}/\mathfrak{P}_3\ \tau\ \mathfrak{P}_1/1$, mithin $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}_1\ \pi\ \mathfrak{P}_1/1$.

Wir führen vollständige Induktion nach der Gruppenordnung durch und setzen $|\mathfrak{G}| > p^2$ voraus. Es gibt eine Untergruppe der Ordnung p im Zentrum von $\mathfrak{G}$. Weil $\mathfrak{G}$ mehr als eine Untergruppe der Ordnung p enthält, verfügt $\mathfrak{G}$ auch über eine elementarabelsche Untergruppe $\mathfrak{Q}$ vom Typ (p, p). Es sei $\mathfrak{M}$ eine maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$, die $\mathfrak{Q}$ umfaßt. Nach Induktionsvoraussetzung sind alle Kompositionsfaktorgruppen von $\mathfrak{M}$ zueinander projektiv. Aus unserer Voraussetzung über $\mathfrak{G}$ folgt die Existenz einer von $\mathfrak{M}$ verschiedenen maximalen Untergruppe $\mathfrak{N}$ [*10*, S. 149]. $\mathfrak{G}/\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$ ist eine elementarabelsche Gruppe vom Typ (p, p). In einer Kompositionsreihe

$\mathfrak{G} \cdot \triangleright \mathfrak{M} \cdot \triangleright \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N} \cdot \triangleright \cdots \cdot \triangleright 1$ sind daher alle Kompositionsfaktorgruppen zueinander projektiv. Unsere Behauptung ist damit bewiesen. Die in Klammern gesetzte Aussage folgt unmittelbar aus (2.5).

Einen Einblick in die Lagerung projektiver abelscher Kompositionsfaktorgruppen einer beliebigen Gruppe $\mathfrak{G}$ mit endlicher Kompositionsreihe erhalten wir durch

(3.4) *Ist $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ eine abelsche Kompositionsfaktorgruppe, σ ein Automorphismus von $\mathfrak{G}$, dann ist $\mathfrak{A}^\sigma/\mathfrak{B}^\sigma$ projektiv zu $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$.*

BEWEIS. (a) Sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}_0 \triangleright \mathfrak{N}_1 \triangleright \cdots \triangleright \mathfrak{N}_m = 1$ eine charakteristische Reihe von $\mathfrak{G}$. Verfeinert man sie zu einer Kompositionsreihe $\mathfrak{G} = \mathfrak{C}_0 \cdot \triangleright \mathfrak{C}_1 \cdot \triangleright \cdots \cdot \triangleright \mathfrak{C}_n = 1$, dann gibt es genau einen Index $k = 1, \ldots, n$ so, daß $\mathfrak{A}/\mathfrak{B} \varrho \mathfrak{C}_{k-1}/\mathfrak{C}_k$ gilt [(1.2) und (2.1)]. Es gibt ferner ein $i = 1, \ldots, m$ derart, daß $\mathfrak{N}_{i-1} \geqq \mathfrak{C}_{k-1} \cdot \triangleright \mathfrak{C}_k \geqq \mathfrak{N}_i$. Daraus folgt $\mathfrak{N}_{i-1} \geqq \mathfrak{C}_{k-1}^\sigma \cdot \triangleright \mathfrak{C}_k^\sigma \geqq \mathfrak{N}_i$ und aus (3.1) $\mathfrak{A}^\sigma/\mathfrak{B}^\sigma \pi \mathfrak{C}_{k-1}^\sigma/\mathfrak{C}_k^\sigma$.

(b) Setzen wir $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ als abelsch voraus, dann ist $\mathfrak{N}_{i-1}/\mathfrak{N}_i$ eine elementarabelsche Gruppe. Nach (3.3) trifft $\mathfrak{C}_{k-1}^\sigma/\mathfrak{C}_k^\sigma \pi \mathfrak{C}_{k-1}/\mathfrak{C}_k$ zu und daher gilt $\mathfrak{A}^\sigma/\mathfrak{B}^\sigma \pi \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$.

(3.4) gilt im allgemeinen nicht, wenn $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ nichtabelsch ist. Als einfachstes Gegenbeispiel betrachten wir die Gruppe $\mathfrak{G} = \langle \sigma \rangle \mathfrak{H}$, $\sigma^2 = 1$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{A}_5 \times \mathfrak{A}_5$ ($\mathfrak{A}_5$ die alternierende Permutationsgruppe auf 5 Ziffern), $(A, B)^\sigma = \sigma^{-1}(A, B)\sigma = (B, A)$ für alle $(A, B) \in \mathfrak{H}$. Wir setzen $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{A}_5 \times 1$, $\mathfrak{M}_2 = 1 \times \mathfrak{A}_5$. Dann sind $\mathfrak{p}_1 = \{\mathfrak{M}_1/1, \mathfrak{H}/\mathfrak{M}_2\}$, $\mathfrak{p}_2 = \{\mathfrak{M}_2/1, \mathfrak{H}/\mathfrak{M}_1\}$ und $\mathfrak{p}_3 = \{\mathfrak{G}/\mathfrak{H}\}$ alle Klassen projektiver Kompositionsfaktorgruppen von $\mathfrak{G}$. Es ist $\mathfrak{M}_1^\sigma/1^\sigma = \mathfrak{M}_2/1$ nicht projektiv zu $\mathfrak{M}_1/1$, sogar bei einem inneren Automorphismus σ von $\mathfrak{G}$.

Die Klassen projektiver abelscher Kompositionsfaktorgruppen sind durch ihre Invarianz bei beliebigen Automorphismen ausgezeichnet, die Klassen projektiver nichtabelscher Kompositionsfaktorgruppen hingegen durch eine recht übersichtliche Einbettung in $s\mathfrak{G}$.

(3.5) (a) *Zu jeder nichtabelschen Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{G}$ gibt es genau eine in $s\mathfrak{G}$ $\cap$-irreduzible subnormale Untergruppe $\mathfrak{C}$ und genau eine in $s\mathfrak{G}$ $\cup$-irreduzible subnormale Untergruppe $\mathfrak{D}$ mit $\mathfrak{K}_\mathfrak{C}/\mathfrak{C} \pi \mathfrak{A}/\mathfrak{B} \pi \mathfrak{D}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$. $\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$ ist normal in $\mathfrak{K}_\mathfrak{C}$ und es gilt $\mathfrak{K}_\mathfrak{C}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D} = \mathfrak{C}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$, $\mathfrak{K}_\mathfrak{C} \geqq \mathfrak{A} \geqq \mathfrak{D}$, $\mathfrak{C} \geqq \mathfrak{B} \geqq \mathfrak{M}_\mathfrak{D}$. Aus $\mathfrak{R}/\mathfrak{S} \pi \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ folgt $\mathfrak{K}_\mathfrak{C} \geqq \mathfrak{R} \geqq \mathfrak{D}$, $\mathfrak{C} \geqq \mathfrak{S} \geqq \mathfrak{M}_\mathfrak{D}$, $\mathfrak{R} = \mathfrak{D}\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{C} \cap \mathfrak{R}$. Definieren wir umgekehrt für jeden Subnormalteiler $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{K}_\mathfrak{C} \geqq \mathfrak{R} \geqq \mathfrak{D}$ die Gruppe $\mathfrak{S} = \mathfrak{C} \cap \mathfrak{R}$ und für jeden Subnormalteiler $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{C} \geqq \mathfrak{S} \geqq \mathfrak{M}_\mathfrak{D}$ die Gruppe $\mathfrak{R} = \mathfrak{D}\mathfrak{S}$, so ist $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ projektiv zu $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$.*

(b) *Die Anzahl der Klassen projektiver nichtabelscher Kompositionsfaktorgruppen ist gleich der Anzahl nichtabelscher Kompositionsfaktorgruppen in einer Kompositionsreihe von $\mathfrak{G}$, gleich der Anzahl der in $s\mathfrak{G}$ $\cap$-irreduziblen Subnormalteiler $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{G}$ mit nichtabelscher Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{K}_\mathfrak{C}/\mathfrak{C}$, gleich der Anzahl der in $s\mathfrak{G}$ $\cup$-irreduziblen perfekten Subnormalteiler $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{G}$.*

BEWEIS. (a) Die Existenz von Untergruppen $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ wurde in (3.2) nachgewiesen. $\mathfrak{D}$ ist perfekt, einköpfig (d.h. $\cup$-irreduzibel) und nicht in $\mathfrak{C}$ enthalten. Also ist $\mathfrak{D}$ normal in $\mathfrak{C} \cup \mathfrak{D} = \mathfrak{K}_\mathfrak{C}$ [*6*, (20)] und daher auch $\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$ normal in $\mathfrak{K}_\mathfrak{C}$: $\mathfrak{K}_\mathfrak{C}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D} = \mathfrak{C}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$.

Es gelte zunächst $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}\ \tau\ \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$, d.h. $\mathfrak{R}=\mathfrak{A}\cup\mathfrak{S}=\mathfrak{A}\,\mathfrak{S}$, $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}\cap\mathfrak{S}$ oder $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}\cup\mathfrak{R}=\mathfrak{B}\,\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}=\mathfrak{B}\cap\mathfrak{R}$. Im ersten Fall ist $\mathfrak{D}\leqq\mathfrak{A}\leqq\mathfrak{R}$, $\mathfrak{M}_\mathfrak{D}\leqq\mathfrak{B}\leqq\mathfrak{S}$, $\mathfrak{D}\not\leqq\mathfrak{S}$, also $\mathfrak{D}\trianglelefteqq\mathfrak{R}=\mathfrak{D}\,\mathfrak{S}$ [6, (20)], $\mathfrak{M}_\mathfrak{D}\lhd\,\mathfrak{R}$ und daher $\mathfrak{R}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}=\mathfrak{D}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}\times\mathfrak{S}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$. Es ist $\mathfrak{S}\leqq\mathfrak{C}$ und folglich $\mathfrak{R}\leqq\mathfrak{K}_\mathfrak{C}$, $\mathfrak{S}=\mathfrak{C}\cap\mathfrak{R}$; denn andernfalls gilt $\mathfrak{K}_\mathfrak{C}\leqq\mathfrak{C}\cup\mathfrak{S}$, weil $\mathfrak{C}$ $\cap$-irreduzibel ist in $\mathfrak{sG}$. Aber $\mathfrak{C}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{S}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$ und daher auch $\mathfrak{C}\cup\mathfrak{S}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$ sind elementweise vertauschbar mit $\mathfrak{D}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}\leqq\mathfrak{K}_\mathfrak{C}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$. Dann liegt $\mathfrak{D}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$ im Zentrum von $\mathfrak{K}_\mathfrak{C}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$, im Widerspruch dazu, daß $\mathfrak{D}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$ nichtabelsch ist.

Im zweiten Fall ist $\mathfrak{K}_\mathfrak{C}\geqq\mathfrak{A}\geqq\mathfrak{R}$, $\mathfrak{C}\geqq\mathfrak{B}\geqq\mathfrak{S}$. Angenommen, es ist $\mathfrak{D}\trianglelefteqq\mathfrak{R}$. Dann folgt $\mathfrak{D}\cap\mathfrak{R}\leqq\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$, weil $\mathfrak{D}$ $\cup$-irreduzibel ist in $\mathfrak{sG}$. $\mathfrak{D}$ ist normal in $\mathfrak{D}\,\mathfrak{R}$ [6, (20)] und daher auch $\mathfrak{M}_\mathfrak{D}\lhd\mathfrak{D}\,\mathfrak{R}$. Jeder maximale Normalteiler $\mathfrak{N}\geqq\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{D}\,\mathfrak{R}$ schneidet $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$, enthält also $\mathfrak{R}\,\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$. Daher haben die Gruppen $\mathfrak{D}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{R}\,\mathfrak{M}_\mathfrak{D}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$ nur das Einheitselement gemeinsam, sind also nach [6, (19)] elementweise vertauschbar. Mithin liegt $\mathfrak{R}\,\mathfrak{M}_\mathfrak{D}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$ im Zentralisator $\mathfrak{C}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{D}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{K}_\mathfrak{C}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$. Weil $\mathfrak{B}\leqq\mathfrak{C}$, folgt $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}\,\mathfrak{R}\leqq\mathfrak{C}$. Das ist ein Widerspruch. Es gilt $\mathfrak{D}\leqq\mathfrak{R}$, $\mathfrak{M}_\mathfrak{D}\leqq\mathfrak{S}$, $\mathfrak{R}=\mathfrak{D}\,\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}=\mathfrak{C}\cap\mathfrak{R}$.

Zu $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ gehören also derselbe in $\mathfrak{sG}$ $\cap$-irreduzible Subnormalteiler $\mathfrak{C}$ und derselbe in $\mathfrak{sG}$ $\cup$-irreduzible Subnormalteiler $\mathfrak{D}$ mit den in (3.2) beschriebenen Eigenschaften. Diese Situation bleibt erhalten, wenn wir von der Relation τ zu der Relation π übergehen. Es kann daher keine zwei verschiedene in $\mathfrak{sG}$ $\cap$-irreduzible Subnormalteiler $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ mit $\mathfrak{K}_{\mathfrak{C}_1}/\mathfrak{C}_1\ \pi\ \mathfrak{A}/\mathfrak{B}\ \pi\,\mathfrak{K}_{\mathfrak{C}_2}/\mathfrak{C}_2$ und auch keine zwei verschiedene in $\mathfrak{sG}$ $\cup$-irreduzible Subnormalteiler $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ mit $\mathfrak{D}_1/\mathfrak{M}_{\mathfrak{D}_1}\ \pi\ \mathfrak{A}/\mathfrak{B}\ \pi\ \mathfrak{D}_2/\mathfrak{M}_{\mathfrak{D}_2}$ geben.

Setzen wir schließlich für jedes $\mathfrak{R}\in\mathfrak{sG}$ mit $\mathfrak{K}_\mathfrak{C}\geqq\mathfrak{R}\geqq\mathfrak{D}$ die Gruppe $\mathfrak{S}=\mathfrak{C}\cap\mathfrak{R}$ fest, dann ist $\mathfrak{K}_\mathfrak{C}=\mathfrak{C}\cup\mathfrak{R}$ und es gilt $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}\ \tau\ \mathfrak{K}_\mathfrak{C}/\mathfrak{C}$. Erklären wir entsprechend für jedes $\mathfrak{S}\in\mathfrak{sG}$ mit $\mathfrak{C}\geqq\mathfrak{S}\geqq\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$ die Gruppe $\mathfrak{R}=\mathfrak{D}\,\mathfrak{S}$, so gilt wegen $\mathfrak{M}_\mathfrak{D}=\mathfrak{D}\cap\mathfrak{S}$ auch $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}\ \tau\ \mathfrak{D}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$. In beiden Fällen ist $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ projektiv zu $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$. Damit ist (a) bewiesen.

(b) ergibt sich unmittelbar aus (a).

Als Folgerung aus (3.5) erhalten wir

(3.6) *Es seien $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ eine nichtabelsche Kompositionsfaktorgruppe, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ die ihr durch* (3.5a) *zugeordneten Subnormalteiler und σ ein Automorphismus von $\mathfrak{G}$. Genau dann ist $\mathfrak{A}^\sigma/\mathfrak{B}^\sigma$ projektiv zu $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$, wenn $\mathfrak{C}^\sigma=\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}^\sigma=\mathfrak{D}$. Es ist $\mathfrak{C}^\sigma=\mathfrak{C}$ genau dann, wenn $\mathfrak{D}^\sigma=\mathfrak{D}$.*

Wir kennzeichnen die Gruppen mit endlicher Kompositionsreihe, in denen alle Klassen projektiver Kompositionsfaktorgruppen die in (3.4) beschriebene Eigenschaft besitzen. Etwas allgemeiner gilt:

(3.7) *Es sei Ω eine Untergruppe der Automorphismengruppe von $\mathfrak{G}$. Genau dann ist $\mathfrak{A}^\sigma/\mathfrak{B}^\sigma$ projektiv zu $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ für jede Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ und jeden Automorphismus $\sigma\in\Omega$, wenn jede nichtabelsche Ω-Kompositionsfaktorgruppe in einer Ω-Kompositionsreihe von $\mathfrak{G}$ einfach ist.*

Beweis. (a) Es sei jede nichtabelsche Ω-Kompositionsfaktorgruppe von $\mathfrak{G}$ in einer Ω-Kompositionsreihe $\mathfrak{G}=\mathfrak{N}_0\rhd\mathfrak{N}_1\rhd\cdots\rhd\mathfrak{N}_m=1$ einfach. Wie im Beweis (a) von (3.4) schließen wir, daß $\mathfrak{A}^\sigma/\mathfrak{B}^\sigma\ \pi\ \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ auch für alle nichtabelschen

Kompositionsfaktorgruppen von $\mathfrak{G}$ und alle Automorphismen aus Ω gilt, weil in diesem Falle $\mathfrak{N}_{i-1}=\mathfrak{C}_{k-1}$ und $\mathfrak{N}_i=\mathfrak{C}_k$ ist.

(b) Es gelte $\mathfrak{A}^\sigma/\mathfrak{B}^\sigma \pi \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ für alle $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}\in K_{s\mathfrak{G}}$ und alle $\sigma\in\Omega$. Angenommen, $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}=\mathfrak{N}_1/\mathfrak{M}\times\cdots\times\mathfrak{N}_r/\mathfrak{M}$ ist eine nichtabelsche Ω-Kompositionsfaktorgruppe von $\mathfrak{G}$ mit $r>1$ isomorphen einfachen Untergruppen $\mathfrak{N}_i/\mathfrak{M}$. Dann gibt es ein $\sigma\in\Omega$ so, daß $\mathfrak{N}_1^\sigma=\mathfrak{N}_2\neq\mathfrak{N}_1$ gilt. Der Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{N}_1/\mathfrak{M}$ seien durch (3.5 a) der in $s\mathfrak{G}$ $\cap$-irreduzible Subnormalteiler $\mathfrak{C}$ und der in $s\mathfrak{G}$ $\cup$-irreduzible Subnormalteiler $\mathfrak{D}$ zugeordnet. Aus der Voraussetzung folgt $\mathfrak{N}_2/\mathfrak{M}=\mathfrak{N}_1^\sigma/\mathfrak{M}^\sigma \pi \mathfrak{N}_1/\mathfrak{M}$. Mit (3.5 a) schließen wir daraus auf $\mathfrak{N}_1=\mathfrak{D}\mathfrak{M}=\mathfrak{N}_2$. Dieser Widerspruch widerlegt unsere Annahme $r>1$. Daher ist $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ einfach.

Als Gegenstück zu (3.7) kennzeichnen wir alle Gruppen mit endlicher Kompositionsreihe, in denen allen Klassen projektiver Kompositionsfaktorgruppen die in (3.5 a) beschriebene Eigenschaft zukommt.

(3.8) *Die folgenden Aussagen sind gleichwertig*:

(a) $s\mathfrak{G}$ *ist distributiv.*

(b) *Zu jeder Kompositionsfaktorgruppe* $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ *von* $\mathfrak{G}$ *gibt es genau einen in* $s\mathfrak{G}$ $\cap$*-irreduziblen Subnormalteiler* $\mathfrak{C}$ *und genau einen in* $s\mathfrak{G}$ $\cup$*-irreduziblen Subnormalteiler* $\mathfrak{D}$ *derart, daß* $\mathfrak{K}_\mathfrak{C}/\mathfrak{C}$ *und* $\mathfrak{D}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$ *projektiv sind zu* $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$.

(c) *Kein Subnormalteiler von* $\mathfrak{G}$ *besitzt eine elementarabelsche Faktorgruppe vom Typ* (p, p).

BEWEIS. (a) ist nach [5, Satz 5] gleichwertig mit

(a') *Es gibt keine Kompositionsfaktorgruppen* $\mathfrak{L}/\mathfrak{M} \pi \mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ *mit* $\mathfrak{M}\geqq\mathfrak{R}$.

I. Aus (a') folgt (b). Denn gibt es zu einer (abelschen) Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ zwei verschiedene in $s\mathfrak{G}$ $\cap$-irreduzible Subnormalteiler $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ so, daß $\mathfrak{K}_{\mathfrak{C}_i}/\mathfrak{C}_i$ projektiv ist zu $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$, dann ist entweder $\mathfrak{C}_i\geqq\mathfrak{K}_{\mathfrak{C}_j}$ oder $\mathfrak{C}_i$ ist nicht in $\mathfrak{C}_j$ $(i\neq j, i=1, 2)$ enthalten. Der erste Fall widerspricht (a'). Im zweiten Falle betrachten wir einen Subnormalteiler $\mathfrak{L}_i\cdot\rhd\mathfrak{C}=\mathfrak{C}_1\cap\mathfrak{C}_2$, der in $\mathfrak{C}_i$ liegt. $\mathfrak{L}_i\cup\mathfrak{C}_j$ $(i\neq j)$ enthält $\mathfrak{K}_{\mathfrak{C}_j}$ und daher ist $\mathfrak{L}_i/\mathfrak{C}$ projektiv zu $\mathfrak{K}_{\mathfrak{C}_j}/\mathfrak{C}_j$ (2.3). Folglich ist $\mathfrak{L}_1\cup\mathfrak{L}_2/\mathfrak{C}$ eine p-Gruppe [5, Satz 2] mit zwei verschiedenen Untergruppen der Ordnung p. Mithin gibt es Kompositionsfaktorgruppen $\mathfrak{L}/\mathfrak{M} \pi \mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{M}\geqq\mathfrak{R}$ (3.3).

Zu der gleichen Aussage gelangen wir, wenn zwei verschiedene in $s\mathfrak{G}$ $\cup$-irreduzible Subnormalteiler $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ existieren derart, daß $\mathfrak{D}_i/\mathfrak{M}_{\mathfrak{D}_i}$ projektiv ist zu $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$. Denn $\mathfrak{M}_{\mathfrak{D}_i}\geqq\mathfrak{D}_j$ trifft nicht zu. Daher schneidet jeder maximale Normalteiler $\mathfrak{N}_i\geqq\mathfrak{D}_i$ von $\mathfrak{D}=\mathfrak{D}_1\cup\mathfrak{D}_2$ den Subnormalteiler $\mathfrak{D}_j$ in $\mathfrak{M}_{\mathfrak{D}_j}$, so daß $\mathfrak{D}/\mathfrak{N}_i$ transponiert ist zu $\mathfrak{D}_j/\mathfrak{M}_{\mathfrak{D}_j}$ $(i\neq j)$. $\mathfrak{D}/\mathfrak{N}_1\cap\mathfrak{N}_2$ ist eine elementarabelsche Gruppe vom Typ (p, p) und wir erhalten mit (3.3) wieder die Existenz übereinanderliegender projektiver Kompositionsfaktorgruppen.

II. Aus (b) folgt (a'). Gibt es Kompositionsfaktorgruppen $\mathfrak{L}/\mathfrak{M} \pi \mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{M}\geqq\mathfrak{R}$, dann weist man mit (3.2) leicht die Existenz von Subnormalteilern $\mathfrak{C}_1\neq\mathfrak{C}_2$ und $\mathfrak{D}_1\neq\mathfrak{D}_2$ nach, die in $s\mathfrak{G}$ $\cap$-irreduzibel bzw. $\cup$-irreduzibel sind und deren Kompositionsfaktorgruppen $\mathfrak{K}_{\mathfrak{C}_i}/\mathfrak{C}_i$ und $\mathfrak{D}_j/\mathfrak{M}_{\mathfrak{D}_j}$ zu $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ bzw. zu $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ transponiert sind. Gilt nämlich $\mathfrak{K}_{\mathfrak{C}_1}\geqq\mathfrak{L}\geqq\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{C}_1\geqq\mathfrak{M}\geqq\mathfrak{M}_{\mathfrak{D}_1}$ und $\mathfrak{K}_{\mathfrak{C}_2}\geqq\mathfrak{R}\geqq\mathfrak{D}_2$

$\mathfrak{C}_2 \geqq \mathfrak{S} \geqq \mathfrak{M}_{\mathfrak{D}_2}$, dann würde aus $\mathfrak{C}_2 = \mathfrak{C}_1 \geqq \mathfrak{M} \geqq \mathfrak{R} \geqq \mathfrak{D}_2$ oder aus $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2 \leqq \mathfrak{R} \leqq \mathfrak{M} \leqq \mathfrak{C}_1$ ein Widerspruch gegen $\mathfrak{K}_{\mathfrak{C}_i} = \mathfrak{C}_i \cup \mathfrak{D}_i$ folgen. Wie wir unter I. gezeigt haben, gibt es dann auch einen Subnormalteiler mit elementarabelscher Faktorgruppe vom Typ (p, p). Damit erhalten wir:

III. Aus (c) folgt (a'). Schließlich folgt mit (3.3) aus (a') auch (c). Damit ist (3.8) bewiesen.

Wir beenden diesen Abschnitt mit Bemerkungen zur Arbeit [2] von O.-H. Keller. [2] beschäftigt sich nur mit Gruppen, die eine endliche Kompositionsreihe besitzen. In [2] wird eine Gruppe „pseudoeinfach" genannt, wenn sie einfach oder eine p-Gruppe ist. Jede Normalreihe kürzester Länge mit pseudoeinfachen Faktorgruppen heißt „Pseudokompositionsreihe". Um die Ergebnisse von [2] mit unseren Untersuchungen in Einklang zu bringen, nennen wir zwei Kompositionsfaktorgruppen *pseudoprojektiv*, wenn sie in pseudoeinfachen Faktorgruppen zweier Normalreihen auftreten, die durch eine Kette von „Vertauschungen", „Verschmelzungen" und „Aufspaltungen" [2, S. 181/182] auseinander hervorgehen. Projektive Kompositionsfaktorgruppen sind pseudoprojektiv. Die Pseudoprojektivität ist eine Äquivalenzrelation in $K_{s\mathfrak{G}}$, die auf den nichtabelschen Kompositionsfaktorgruppen mit der Projektivität übereinstimmt. Eine Klasse pseudoprojektiver abelscher Kompositionsfaktorgruppen kann jedoch auf Grund des Satzes (3.3) aus mehreren Klassen projektiver Kompositionsfaktorgruppen bestehen. Ändert man aber die Definition und nennt nur solche p-Gruppen pseudoeinfach, die entweder einfach sind oder mehr als eine Untergruppe der Ordnung p besitzen, dann sind pseudoprojektive Kompositionsfaktorgruppen auch projektiv.

In „lockeren" Gruppen [2, § 4] hat keine subnormale Untergruppe eine elementarabelsche Faktorgruppe vom Typ (p, p). Andererseits wird bei der Konstruktion des Streckenkomplexes einer lockeren Gruppe außer der endlichen Kompositionsreihe von $\mathfrak{G}$ nur gebraucht, daß zu jeder Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ genau ein in $s\mathfrak{G}$ $\cap$-irreduzibler Subnormalteiler $\mathfrak{C}$ gehört, so daß $\mathfrak{K}_{\mathfrak{C}}/\mathfrak{C}$ projektiv ist zu $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$. Man kann also allen Gruppen mit endlicher Kompositionsreihe und distributivem Subnormalteilerverband einen Streckenkomplex im Sinne von Keller zuordnen.

4. Die Kongruenzklassen in $s\mathfrak{G}$

Wir setzen auch in diesem Abschnitt voraus, daß $\mathfrak{G}$ eine endliche Kompositionsreihe besitzt. $\varkappa$ sei eine Kongruenzrelation in $s\mathfrak{G}$. Mit $\varkappa(\mathfrak{A})$ bezeichnen wir die Menge der Subnormalteiler $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A} \pmod{\varkappa}$, also die Kongruenzklasse von $s\mathfrak{G}$ nach $\varkappa$, die $\mathfrak{A}$ enthält. $\varkappa(\mathfrak{A})$ besitzt ein eindeutig bestimmtes maximales Element $\overline{\varkappa}(\mathfrak{A})$ und ein eindeutig bestimmtes minimales Element $\underline{\varkappa}(\mathfrak{A})$. Es sei B die Menge der von $\varkappa$ annullierten Klassen $\mathfrak{p} \in K_{s\mathfrak{G}}/\pi$. $\overline{\varkappa}(\mathfrak{A})$ ist die maximale subnormale Obergruppe von $\mathfrak{A}$ derart, daß eine Kompositionskette von $\varkappa(\mathfrak{A})$ bis $\mathfrak{A}$ nur Kompositionsfaktorgruppen $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{p}(\mathfrak{R}/\mathfrak{S}) \in \mathsf{B}$ besitzt. Entsprechend ist $\underline{\varkappa}(\mathfrak{A})$ die minimale subnormale Untergruppe von $\mathfrak{A}$ mit der Eigenschaft, daß $\mathfrak{p}(\mathfrak{L}/\mathfrak{M})$ in B liegt für alle Kompositionsfaktorgruppen

$\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ aus einer Kompositionskette von $\mathfrak{A}$ bis $\underline{\varkappa}(\mathfrak{A})$. Es sei λ eine zweite Kongruenzrelation, die die Menge $\Gamma \subseteq K_{s\mathfrak{G}}/\pi$ annulliert.

(4.1) *Für jeden Subnormalteiler $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$ gilt*

(a) $\quad \overline{\varkappa}(\mathfrak{A}) \cap \overline{\lambda}(\mathfrak{A}) = \overline{\varkappa \cap \lambda}(\mathfrak{A}), \qquad \overline{\varkappa}(\mathfrak{A}) \cup \overline{\lambda}(\mathfrak{A}) \leqq \overline{\varkappa \cup \lambda}(\mathfrak{A}),$

(b) $\quad \underline{\varkappa}(\mathfrak{A}) \cap \underline{\lambda}(\mathfrak{A}) \geqq \underline{\varkappa \cup \lambda}(\mathfrak{A}), \qquad \underline{\varkappa}(\mathfrak{A}) \cup \underline{\lambda}(\mathfrak{A}) = \underline{\varkappa \cap \lambda}(\mathfrak{A}).$

BEWEIS. (a) Aus $\overline{\varkappa \cap \lambda}(\mathfrak{A}) \equiv \mathfrak{A} \pmod{\varkappa \cap \lambda}$ folgt $\overline{\varkappa \cap \lambda}(\mathfrak{A}) \equiv \mathfrak{A} \pmod{\varkappa}$ und $\overline{\varkappa \cap \lambda}(\mathfrak{A}) \equiv \mathfrak{A} \pmod{\lambda}$. Also gilt $\overline{\varkappa \cap \lambda}(\mathfrak{A}) \leqq \overline{\varkappa}(\mathfrak{A}) \cap \overline{\lambda}(\mathfrak{A})$. Andererseits ist $\mathfrak{p}(\mathfrak{R}/\mathfrak{S})$ in $\mathsf{B} \cap \Gamma$ enthalten, wenn $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ in einer Kompositionskette von $\overline{\varkappa}(\mathfrak{A}) \cap \overline{\lambda}(\mathfrak{A})$ bis $\mathfrak{A}$ auftritt. Mithin ist $\overline{\varkappa}(\mathfrak{A}) \cap \overline{\lambda}(\mathfrak{A}) \leqq \overline{\varkappa \cap \lambda}(\mathfrak{A})$. Es gilt die in (4.1 a) behauptete Gleichung.

Ferner ist $\overline{\varkappa}(\mathfrak{A}) \equiv \mathfrak{A} \pmod{\varkappa \cup \lambda}$ und $\overline{\lambda}(\mathfrak{A}) \equiv \mathfrak{A} \pmod{\varkappa \cup \lambda}$, also auch $\overline{\varkappa}(\mathfrak{A}) \cup \overline{\lambda}(\mathfrak{A}) \equiv \mathfrak{A} \pmod{\varkappa \cup \lambda}$, was $\overline{\varkappa}(\mathfrak{A}) \cup \overline{\lambda}(\mathfrak{A}) \leqq \overline{\varkappa \cup \lambda}(\mathfrak{A})$ bedeutet.

(b) Ebenso ist $\underline{\varkappa}(\mathfrak{A}) \equiv \mathfrak{A} \pmod{\varkappa \cup \lambda}$ und $\underline{\lambda}(\mathfrak{A}) \equiv \mathfrak{A} \pmod{\varkappa \cup \lambda}$, folglich $\underline{\varkappa}(\mathfrak{A}) \cap \underline{\lambda}(\mathfrak{A}) \equiv \mathfrak{A} \pmod{\varkappa \cup \lambda}$, d.h. es ist $\underline{\varkappa}(\mathfrak{A}) \cap \underline{\lambda}(\mathfrak{A}) \geqq \underline{\varkappa \cup \lambda}(\mathfrak{A})$.

Es gilt $\underline{\varkappa \cap \lambda}(\mathfrak{A}) \equiv \mathfrak{A} \pmod{\varkappa}$ und $\underline{\varkappa \cap \lambda}(\mathfrak{A}) \equiv \mathfrak{A} \pmod{\lambda}$, also $\underline{\varkappa \cap \lambda}(\mathfrak{A}) \geqq \underline{\varkappa}(\mathfrak{A}) \cup \underline{\lambda}(\mathfrak{A})$. Zum anderen ist $\mathfrak{p}(\mathfrak{R}/\mathfrak{S})$ in $\mathsf{B} \cap \Gamma$ enthalten, wenn $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ in einer Kompositionskette von $\mathfrak{A}$ bis $\underline{\varkappa}(\mathfrak{A}) \cup \underline{\lambda}(\mathfrak{A})$ auftritt. Daher gilt $\underline{\varkappa \cap \lambda}(\mathfrak{A}) \leqq \underline{\varkappa}(\mathfrak{A}) \cup \underline{\lambda}(\mathfrak{A})$ und daraus folgt die Gleichung in (4.1 b).

Daß in den Ungleichungen von (4.1) auch $<$ bzw. $>$ stehen kann, lehrt das Beispiel $\mathfrak{G} = \langle \sigma \rangle (\mathfrak{A}_5 \times \mathfrak{A}_5)$ aus Abschnitt 3. Wir setzen dort $\mathsf{B} = \{\mathfrak{p}_1\}$, $\Gamma = \{\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3\}$ und bezeichnen mit $\varkappa$, λ die zugehörigen Kongruenzrelationen in $s\mathfrak{G}$. Dann ist $\overline{\varkappa}(1) = \mathfrak{M}_1$, $\overline{\lambda}(1) = \mathfrak{M}_2$, aber $\overline{\varkappa}(1) \cup \overline{\lambda}(1) = \mathfrak{H} < \mathfrak{G} = \overline{\varkappa \cup \lambda}(1)$. Außerdem ist $\underline{\varkappa}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$, $\underline{\lambda}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{M}_1$, aber $\underline{\varkappa}(\mathfrak{G}) \cap \underline{\lambda}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{M}_1 > 1 = \underline{\varkappa \cup \lambda}(\mathfrak{G})$. Damit haben wir zugleich ein Beispiel dafür gefunden, daß der untere Kern $\overline{\varkappa}(1)$ und der obere Kern $\underline{\varkappa}(\mathfrak{G})$ einer Kongruenzrelation in $s\mathfrak{G}$ nicht notwendig Normalteiler zu sein brauchen, im Gegensatz zu den Verhältnissen in Untergruppenverbänden [4, S. 58]; denn $\overline{\varkappa}(1) = \mathfrak{M}_1$ und $\underline{\lambda}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{M}_1$ sind nicht normal in $\mathfrak{G}$. Als wichtigstes Ergebnis dieses Abschnittes zeigen wir

(4.2) SATZ. *Es sei Ω eine Untergruppe der Automorphismengruppe von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{N}$ ein Ω-invarianter Subnormalteiler von $\mathfrak{G}$.*

(a) *Genau dann ist für jede Kongruenzrelation $\varkappa$ in $s\mathfrak{G}$ auch $\overline{\varkappa}(\mathfrak{N})$ Ω-invariant, wenn jede nichtabelsche Ω-Kompositionsfaktorgruppe einer Ω-Kompositionskette von $\mathfrak{G}$ bis $\mathfrak{N}$ einfach ist.*

(b) *Genau dann ist für jede Kongruenzrelation $\varkappa$ in $s\mathfrak{G}$ auch $\underline{\varkappa}(\mathfrak{N})$ Ω-invariant, wenn jede nichtabelsche Ω-Kompositionsfaktorgruppe einer Ω-Kompositionskette von $\mathfrak{N}$ bis 1 einfach ist.*

BEWEIS. (a) Sei jede nichtabelsche Ω-Kompositionsfaktorgruppe einer Ω-Kompositionskette von $\mathfrak{G}$ bis $\mathfrak{N}$ einfach und $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ eine Kompositionsfaktorgruppe zwischen $\overline{\varkappa}(\mathfrak{N})$ und $\mathfrak{N}$. Dann ist $\mathfrak{A}^\sigma/\mathfrak{B}^\sigma$ projektiv zu $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ für jeden Automorphismus $\sigma \in \Omega$. Für abelsche Kompositionsfaktorgruppen folgt dies aus (3.4). Ist $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ nichtabelsch, dann gibt es in einer Ω-Kompositionskette $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_0 \rhd \mathfrak{H}_1 \rhd \cdots \rhd \mathfrak{H}_r = \mathfrak{N}$ eine einfache Faktorgruppe $\mathfrak{H}_{i-1}/\mathfrak{H}_i \varrho\, \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ [(2.1)

und (1.2)], für die dann auch $\mathfrak{H}_{i-1}/\mathfrak{H}_i \pi \mathfrak{A}^\sigma/\mathfrak{B}^\sigma$ gilt (3.2), weil $\mathfrak{H}_{i-1}$, $\mathfrak{H}_i$ Ω-invariant sind. Also sind $\mathfrak{A}^\sigma/\mathfrak{B}^\sigma$ und $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ projektiv. Annulliert die Kongruenzrelation $\varkappa$ genau die Klassen aus $\mathsf{B} \leq K_{s\mathfrak{G}}/\pi$, dann liegen auch die Klassen $\mathfrak{p}(\mathfrak{A}^\sigma/\mathfrak{B}^\sigma) = \mathfrak{p}(\mathfrak{A}/\mathfrak{B})$ aller Kompositionsfaktorgruppen $\mathfrak{A}^\sigma/\mathfrak{B}^\sigma$ zwischen $\overline{\varkappa}(\mathfrak{N})^\sigma$ und $\mathfrak{N}^\sigma = \mathfrak{N}$ in B. Es folgt $\overline{\varkappa}(\mathfrak{N})^\sigma \leq \overline{\varkappa}(\mathfrak{N})$ und, weil die Kompositionsketten von $\overline{\varkappa}(\mathfrak{N})^\sigma$ bis $\mathfrak{N}$ und von $\overline{\varkappa}(\mathfrak{N})$ bis $\mathfrak{N}$ die gleiche Länge haben, $\overline{\varkappa}(\mathfrak{N})^\sigma = \overline{\varkappa}(\mathfrak{N})$.

Um die Umkehrung zu zeigen, nehmen wir an, daß $\mathfrak{G}$ eine nichtabelsche Ω-Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{L}/\mathfrak{M} = \mathfrak{L}_1/\mathfrak{M} \times \cdots \times \mathfrak{L}_t/\mathfrak{M}$ mit $t > 1$ isomorphen einfachen Gruppen $\mathfrak{L}_j/\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M} \geqq \mathfrak{N}$ besitzt. Dann gibt es ein $\sigma \in \Omega$ mit $\mathfrak{L}_1^\sigma = \mathfrak{L}_2 \neq \mathfrak{L}_1$. Es seien $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ der in $s\mathfrak{G}$ $\cap$-irreduzible bzw. $\cup$-irreduzible Subnormalteiler von $\mathfrak{G}$, die $\mathfrak{L}_1/\mathfrak{M}$ durch (3.5a) zugeordnet sind. Angenommen, es ist $\mathfrak{C}^\sigma = \mathfrak{C}$. (3.6) zufolge ist dann $\mathfrak{L}_2/\mathfrak{M} = \mathfrak{L}_1^\sigma/\mathfrak{M}^\sigma$ projektiv zu $\mathfrak{L}_1/\mathfrak{M}$. Daraus folgt aber mit (3.5a) $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{D}\mathfrak{M} = \mathfrak{L}_2$, also ein Widerspruch. Es ist $\mathfrak{C}^\sigma \neq \mathfrak{C}$. Nun sei B die Menge der Klassen $\mathfrak{p}(\mathfrak{A}/\mathfrak{B})$, die eine Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ aus einer Kompositionskette von $\mathfrak{C}$ bis 1 enthalten, und $\varkappa$ sei die zugehörige Kongruenzrelation in $s\mathfrak{G}$. $\mathfrak{C}$ ist Untergruppe von $\overline{\varkappa}(1)$ und es ist $\overline{\varkappa}(\mathfrak{N}) = \overline{\varkappa}(1)$, weil $\mathfrak{N} \leqq \mathfrak{M} \leqq \mathfrak{C}$. Jede echte subnormale Obergruppe von $\mathfrak{C}$ enthält $\mathfrak{K}_\mathfrak{C}$. Hingegen ist $\mathfrak{p}(\mathfrak{K}_\mathfrak{C}/\mathfrak{C})$ nicht in B enthalten. Folglich ist $\overline{\varkappa}(\mathfrak{N}) = \mathfrak{C} \neq \mathfrak{C}^\sigma = \overline{\varkappa}(\mathfrak{N})^\sigma$.

(b) Ist jede nichtabelsche Ω-Kompositionsfaktorgruppe in einer Ω-Kompositionskette von $\mathfrak{N}$ bis 1 einfach, dann folgt analog zum Beweis von (a) $\underline{\varkappa}(\mathfrak{N})^\sigma = \underline{\varkappa}(\mathfrak{N})$ für alle $\sigma \in \Omega$ und jede Kongruenzrelation $\varkappa$ in $s\mathfrak{G}$.

Zum Beweis der Umkehrung setzen wir voraus, daß $\mathfrak{G}$ eine nichtabelsche Ω-Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{L}/\mathfrak{M} = \mathfrak{L}_1/\mathfrak{M} \times \cdots \times \mathfrak{L}_t/\mathfrak{M}$ mit $t > 1$ isomorphen einfachen Gruppen $\mathfrak{L}_j/\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N} \geqq \mathfrak{L}$ besitzt. Es gibt dann ein $\sigma \in \Omega$ mit $\mathfrak{L}_1^\sigma = \mathfrak{L}_2 \neq \mathfrak{L}_1$. Der Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{L}_1/\mathfrak{M}$ seien die Subnormalteiler $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ gemäß (3.5a) zugeordnet. Wie im Teil (a) zeigt man $\mathfrak{D}^\sigma \neq \mathfrak{D}$. Mit B bezeichnen wir jetzt die Menge der Klassen $\mathfrak{p}(\mathfrak{A}/\mathfrak{B})$, die eine Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ aus einer Kompositionskette von $\mathfrak{G}$ bis $\mathfrak{D}$ enthalten, und $\varkappa$ sei die zugehörige Kongruenzrelation in $s\mathfrak{G}$. Es gilt $\mathfrak{D} \geqq \underline{\varkappa}(\mathfrak{G})$ und $\underline{\varkappa}(\mathfrak{N}) = \underline{\varkappa}(\mathfrak{G})$, weil $\mathfrak{N} \geqq \mathfrak{L} \geqq \mathfrak{D}$. Jede echte subnormale Untergruppe von $\mathfrak{D}$ ist in $\mathfrak{M}_\mathfrak{D}$ enthalten. $\mathfrak{p}(\mathfrak{D}/\mathfrak{M}_\mathfrak{D})$ liegt aber nicht in B. Daher ist $\underline{\varkappa}(\mathfrak{N}) = \mathfrak{D} \neq \mathfrak{D}^\sigma = \underline{\varkappa}(\mathfrak{N})^\sigma$, womit (b) bewiesen ist.

Wir erwähnen einige Folgerungen aus (4.2).

(4.3) *Genau dann sind für jeden Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ und jede Kongruenzrelation $\varkappa$ in $s\mathfrak{G}$ auch $\overline{\varkappa}(\mathfrak{N})$ und $\underline{\varkappa}(\mathfrak{N})$ normal in $\mathfrak{G}$, wenn in einer Hauptreihe von $\mathfrak{G}$ jede nichtabelsche Hauptfaktorgruppe einfach ist.*

(4.4) *Genau dann ist der untere Kern $\overline{\varkappa}(1)$ (der obere Kern $\underline{\varkappa}(\mathfrak{G})$) jeder Kongruenzrelation $\varkappa$ in $s\mathfrak{G}$ normal in $\mathfrak{G}$, wenn in einer Hauptreihe von $\mathfrak{G}$ jede nichtabelsche Hauptfaktorgruppe einfach ist.*

(4.5) *Es sei $\mathfrak{G}$ auflösbar, σ ein Automorphismus von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{A}$ ein Subnormalteiler von $\mathfrak{G}$. Gilt $\mathfrak{A}^\sigma = \mathfrak{A}$, dann folgt für jede Kongruenzrelation $\varkappa$ in $s\mathfrak{G}$ auch $\overline{\varkappa}(\mathfrak{A})^\sigma = \overline{\varkappa}(\mathfrak{A})$ und $\underline{\varkappa}(\mathfrak{A})^\sigma = \underline{\varkappa}(\mathfrak{A})$. Insbesondere sind der untere Kern $\overline{\varkappa}(1)$ und der obere Kern $\underline{\varkappa}(\mathfrak{G})$ stets charakteristische Untergruppen von $\mathfrak{G}$.*

Literatur

[1] Birkhoff, G.: Lattice Theory. Revised Edition 1948.
[2] Keller, O.-H.: Eine Darstellung der Komposition endlicher Gruppen durch Strekkenkomplexe. Math. Ann. **128**, 177—199 (1954).
[3] Kořínek, Vl.: Lattices in which the theorem of Jordan-Hölder is generally true. Bull. intern. Acad. tchèque Sci. **50**, No. 23 (1949).
[4] Suzuki, M.: Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups. Ergebn. d. Math. ,N. F. **10** (1956).
[5] Tamaschke, O.: Submodulare Verbände. Math. Z. **74**, 186—190 (1960).
[6] Wielandt, H.: Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen. Math. Z. **45**, 209—244 (1939).
[7] Wielandt, H.: Vertauschbare nachinvariante Untergruppen. Abh. Math. Sem. Hamburg **21**, 55—62 (1957).
[8] Wielandt, H.: Sylowgruppen und Kompositions-Struktur. Abh. Math. Sem. Hamburg **22**, 215—228 (1958).
[9] Wielandt, H.: Über den Normalisator der subnormalen Untergruppen. Math. Z. **69**, 463—465 (1958).
[10] Zassenhaus, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie I. 2. Aufl. 1958.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 24. März 1960)

Itô, N.
Math. Zeitchr. 75, 127—135 (1961)

Zur Theorie der transitiven Gruppen vom Grad p. II

Herrn Helmut Wielandt zum 50. Geburtstag am 19. Dezember 1960 gewidmet

Von
Noboru Itô

Es sei Ω die Menge der Ziffern $1, \ldots, p$, wobei p eine Primzahl $\geqq 5$ bezeichnet. $\mathfrak{G}$ sei eine nicht auflösbare transitive Permutationsgruppe auf Ω, in der der Normalisator $N_s\mathfrak{P}$ einer p-Sylowgruppe $\mathfrak{P}$ die Ordnung qp besitzt. Es ist unsere Absicht, zu fest vorgegebenem q und beliebig variierendem p die Struktur von $\mathfrak{G}$ zu bestimmen (vgl. [7]). In dieser Arbeit beweisen wir den folgenden

Satz. *Sei $2<q<p-1$. $\mathfrak{G}$ sei $2(q-1)$-fach transitiv. Dann ist $\mathfrak{G}$ zu $\mathfrak{A}_p$ mit $p=2q+1$ isomorph. Dabei bezeichnet $\mathfrak{A}_p$ die alternierende Gruppe vom Grad p.*

Wir schicken einige Resultate von Frobenius und R. Brauer voraus, die im folgenden benutzt werden.

I. Aus der Theorie von Frobenius über die symmetrische Gruppe und ihre mehrfach transitiven Untergruppen.

Sei $n=a_1+\cdots+a_k$ mit $a_1\geqq\cdots\geqq a_k>0$ eine Zerlegung einer natürlichen Zahl n in irgendwelche natürliche Zahlen a_i $(1\leqq i\leqq k)$. Wir ordnen dieser Zerlegung ein sog. Young-Diagramm Δ zu:

$$\Delta: \begin{array}{ll} \text{o} \ldots \ldots \text{o} & a_1 \text{ Nullen} \\ \vdots \qquad\qquad & \vdots \\ \text{o} \ldots \text{o} & a_k \text{ Nullen.} \end{array}$$

Die Zahl $n-a_1$ heißt die Dimension $d(\Delta)$ des Young-Diagramms Δ.

$\mathfrak{S}_n$ bezeichne die symmetrische Gruppe vom Grad n. Bekanntlich gibt es eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Young-Diagrammen Δ und den irreduziblen Charakteren χ_Δ von $\mathfrak{S}_n$.

(I.1) (Siehe [5]). $\mathfrak{G}$ sei eine r-fach transitive Untergruppe von $\mathfrak{S}_n$. Dann bleibt jeder irreduzible Charakter χ_Δ von $\mathfrak{S}_n$ mit $d(\Delta)\leqq r/2$ irreduzibel auf $\mathfrak{G}$. Weiter sind zwei verschiedene irreduzible Charaktere χ_Δ und $\chi_{\Delta'}$ von $\mathfrak{S}_n$ zueinander orthogonal auf $\mathfrak{G}$, wenn $d(\Delta)+d(\Delta')\leqq r$ ist.

(I.2) (Siehe [4]). Δ_k bezeichne das Young-Diagramm

$$\begin{matrix} & o & . & . & o \\ k & o & & & \\ & . & & & \\ & . & & & \\ & o & & & \end{matrix}$$

$(0 \leqq k \leqq n-1)$. Setze $\chi_{\Delta_k} = \chi_k$. Für jedes Element G aus $\mathfrak{S}_n$ bezeichne $\alpha_i(G)$ die Anzahl der Zyklen der Länge i in der Zyklendarstellung von G $(1 \leqq i \leqq n)$. Dann gilt für jedes Element G aus $\mathfrak{S}_n$ die Formeln:

$$\chi_0(G) = 1,$$

$$\chi_1(G) = \alpha_1(G) - 1,$$

$$\chi_2(G) = \binom{\alpha_1(G) - 1}{2} - \alpha_2(G),$$

$$\chi_3(G) = \binom{\alpha_1(G) - 1}{3} - (\alpha_1(G) - 1)\,\alpha_2(G) + \alpha_3(G) \quad \text{und}$$

$$\chi_k(G) = \binom{\alpha_1(G) - 1}{k} + \cdots + (-1)^{k-1} \left\{ \binom{\alpha_1(G) - 1}{2} - \alpha_2(G) \right\} \alpha_{k-2}(G) +$$
$$+ (-1)^k (\alpha_1(G) - 1)\,\alpha_{k-1}(G) + (-1)^{k+1} \alpha_k(G) \qquad (4 \leqq k \leqq n-1).$$

Insbesondere ist der Grad von χ_k gleich $\binom{n-1}{k}$.

II. AUS DER p-BLOCKTHEORIE VON R. BRAUER [2].

Es sei $\mathfrak{G}$ eine transitive Permutationsgruppe vom Grad p, in der der Normalisator $N_s\mathfrak{P}$ einer p-Sylowgruppe $\mathfrak{P}$ die Ordnung qp besitzt. $\mathfrak{G}$ stimme mit seiner Kommutatoruntergruppe überein.

Der erste p-Block $\mathsf{B}_1(p)$ von Charakteren von $\mathfrak{G}$ besteht aus α irreduziblen Charakteren, die mit A_ϱ $(1 \leqq \varrho \leqq \alpha)$ bezeichnet werden und deren Grade modulo p gleich 1 sind, aus $\beta = q - \alpha$ irreduziblen Charakteren, die mit B_σ $(1 \leqq \sigma \leqq \beta)$ bezeichnet werden und deren Grade modulo p gleich -1 sind, und aus einer Familie von $\frac{p-1}{q}$ p-konjugierten irreduziblen Charakteren $C^{(\nu)}$ $(\nu = 1, \ldots, p-1/q)$. A_ϱ und B_σ bilden je für sich eine Familie p-konjugierter Charaktere. Alle anderen irreduziblen Charaktere von $\mathfrak{G}$ gehören zu p-Blöcken mit Defekt 0, verschwinden also für jedes p-singuläre Element von $\mathfrak{G}$. Wir setzen $\mathfrak{P} = \langle P \rangle$. Dann haben wir $A_\varrho(P^i) = 1$ und $B_\sigma(P^i) = -1$ für $i = 1, \ldots, p-1$ $(1 \leqq \varrho \leqq \alpha,\ 1 \leqq \sigma \leqq \beta)$. Es gilt auch für jedes p-reguläre Element G von $\mathfrak{G}$ die Gleichung

$$(B) \qquad \sum_{\varrho=1}^{\alpha} A_\varrho(G) + \delta\, C^{(\nu)}(G) = \sum_{\sigma=1}^{\beta} B_\beta(G) \quad \text{mit} \quad \delta = \pm 1.$$

Beweis des Satzes.

Sei $\mathfrak{N}$ ein minimaler Normalteiler $>E$ von $\mathfrak{G}$. Als eigentlicher Normalteiler einer primitiven Gruppe ist $\mathfrak{N}$ transitiv. Daher gilt $\mathfrak{N} \geqq \mathfrak{P}$. Da alle p-Sylowgruppen von $\mathfrak{G}$ bereits in $\mathfrak{N}$ zueinander konjugiert sind, folgt $\mathfrak{G} = N_{\mathfrak{S}}\mathfrak{P}\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{N} \cong N_{\mathfrak{S}}\mathfrak{P}/N_{\mathfrak{S}}\mathfrak{P} \cap \mathfrak{N}$ ist zyklisch. Weil $\mathfrak{G}$ nicht auflösbar ist, so ist $\mathfrak{N}$ nicht auflösbar. Als minimaler Normalteiler stimmt $\mathfrak{N}$ mit seiner Kommutatoruntergruppe überein. Also können wir auf $\mathfrak{N}$ die Ergebnisse der p-Blocktheorie von R. Brauer aus II anwenden.

Wenn $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{N}$ ist, folgt $N_{\mathfrak{S}}\mathfrak{P} \neq N_{\mathfrak{S}}\mathfrak{P} \cap \mathfrak{N}$. Die Ordnung von $N_{\mathfrak{S}}\mathfrak{P} \cap \mathfrak{N}$ sei gleich $q'p$. Dann gilt $q' \leqq q/2$. Nach einem Satz von C. Jordan [6] ist $\mathfrak{N}$ $(2q-3)$-fach transitiv. Also bleiben nach Frobenius (I.1) und (I.2) die Charaktere $\chi_0, \ldots, \chi_{q-2}$ irreduzibel auf $\mathfrak{N}$ und sind verschieden voneinander. Weiterhin sind ihre Grade prim zu p und sie sind rationale Charaktere. Sie stimmen demnach mit gewissen der A_ϱ, B_σ von $\mathfrak{N}$ überein. Also haben wir nach (B) die Ungleichung $q-1 \leqq q'$. Zusammen mit der Ungleichung $q' \leqq q/2$ folgt $q \leqq 2$. Das widerspricht der Voraussetzung des Satzes. Also ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{G}$ ist einfach. Insbesondere stimmt $\mathfrak{G}$ mit seiner Kommutatoruntergruppe überein. Somit können wir auf $\mathfrak{G}$ die p-Blocktheorie von R. Brauer anwenden.

Nach Frobenius (I.1) und (I.2) bleiben $\chi_0, \ldots, \chi_{q-1}$ irreduzibel auf $\mathfrak{G}$ und sie sind verschieden voneinander. Wegen $\binom{p-1}{k} \equiv \pm 1$ modulo p stimmen sie mit den A_ϱ und B_σ überein. Und zwar ist jedes χ_k mit geradem k ein A_ϱ und jedes χ_k mit ungeradem k ein B_σ. Also haben wir $\alpha = \beta = q/2$, wenn q gerade ist, und $\alpha = (q-1)/2$, $\beta = (q+1)/2$, wenn q ungerade ist. Wegen $\binom{p-1}{0} - \binom{p-1}{1} + \cdots + (-1)^k \binom{p-1}{k} > 0$ für gerades $k < \frac{p-1}{2}$ und < 0 für ungerades $k < \frac{p-1}{2}$ gilt die Gleichung (B) mit $\delta = 1$ für gerades q und $\delta = -1$ für ungerades q.

Da $\binom{p-2}{q-1} = \binom{p-1}{1} + \cdots + \binom{p-1}{q-1} - \binom{p-1}{0} - \cdots - \binom{p-1}{q-2}$ für gerades q und $= \binom{p-1}{0} + \cdots + \binom{p-1}{q-1} - \binom{p-1}{1} - \cdots - \binom{p-1}{q-2}$ für ungerades q ist, folgt aus der Gleichung (B), daß der Grad von $C^{(\nu)}$ gleich $\binom{p-2}{q-1}$ ist.

Nun betrachten wir den irreduziblen Charakter χ_q von $\mathfrak{S}_p$ in $\mathfrak{G}$. Nach Frobenius (I.1) ist χ_q in $\mathfrak{G}$ orthogonal zu jedem χ_k $(0 \leqq k \leqq q-2)$. Wir nehmen an, daß χ_q in $\mathfrak{G}$ kein $C^{(\nu)}$ umfaßt. Dann enthält χ_q in $\mathfrak{G}$ von den Charakteren aus $\mathsf{B}_1(p)$ höchstens χ_{q-1}. Daher besitzt die Zerlegung von χ_q in die irreduziblen Charaktere von $\mathfrak{G}$ folgende Gestalt:

$$\chi_q(G) = m_{q-1}\chi_{q-1}(G) + X(G) \quad (G \in \mathfrak{G}),$$

wobei X eine lineare Kombination der Charaktere von $\mathfrak{G}$ mit Defekt 0 bezeichnet. Setzen wir $G=P$, dann haben wir nach BRAUER II die Gleichung $(-1)^q=m_{q-1}(-1)^{q-1}$. Da m_{q-1} nicht negativ ist, ist das ein Widerspruch. Also umfaßt χ_q in $\mathfrak{G}$ mindestens ein $C^{(\nu)}$. Dann umfaßt χ_q in $\mathfrak{G}$ alle $C^{(\nu)}$, weil χ_q rational und alle $C^{(\nu)}$ zueinander algebraisch konjugiert sind. Indem wir die Grade der beiden Charaktere χ_q und $\sum_{\nu=1}^{(p-1)/q} C^{(\nu)}$ vergleichen, erhalten wir in $\mathfrak{G}$ die Gleichung $\chi_q=\sum_{\nu=1}^{(p-1)/q} C^{(\nu)}$. Daher bekommen wir aus (B) die folgende Gleichung für p-reguläre Elemente

$$(*)\quad \chi_q=(-1)^q\frac{p-1}{q}\{(\chi_1+\cdots+\chi_{q-\frac{q}{2}+(-1)^q\frac{q}{2}})-(\chi_0+\cdots+\chi_{q-\frac{q}{2}-(-1)^q\frac{q}{2}})\}.$$

Sei $G\neq E$ ein Element aus $\mathfrak{G}$ mit $\alpha_1(G)>q$ und $\alpha_2(G)=\cdots=\alpha_{q-1}(G)=0$. Dann ist nach FROBENIUS (I.2) und der Gleichung (*)

$$\alpha_q(G)=(-1)^{q+1}\left\{\frac{p-1}{q}\binom{\alpha_1(G)-2}{q-1}-\binom{\alpha_1(G)-1}{q}\right\}.$$

(Hier haben wir die gleiche Schlußweise wie bei der Berechnung des Grades von $C^{(\nu)}$ benutzt.) Daraus folgt

$$\alpha_q(G)=(-1)^{q+1}\left\{\left(\frac{p-\alpha_1(G)}{q}\binom{\alpha_1(G)-2}{q-1}\right\}.$$

Für gerades q ist dies ein Widerspruch. Sei q ungerade. Wegen

$$\alpha_1(G)+q\,\alpha_q(G)+\cdots=p$$

bekommen wir aus der letzten Gleichung $\alpha_1(G)=q+1$.

Es bezeichne $\mathfrak{G}_{1,\ldots,k}$ die größte Untergruppe von $\mathfrak{G}$, die die Ziffern $1,\ldots,k$ einzeln fest läßt $(1\leqq k\leqq p)$. Sei q gerade. Die Ordnung von $\mathfrak{G}_{1,\ldots,q+1}$ besitze einen Primteiler l größer als $q-1$. Sei G ein Element aus $\mathfrak{G}_{1,\ldots,q+1}$ der Ordnung l. Dann erfüllt dieses Element G die Bedingung $\alpha_1(G)>q$ und $\alpha_2(G)=\cdots=\alpha_{q-1}(G)=0$. Das ist ein Widerspruch. Also ist jeder Primteiler der Ordnung von $\mathfrak{G}_{1,\ldots,q+1}$ kleiner als q. Sei q ungerade. Dann kann man gleicherweise schließen, daß jeder Primteiler der Ordnung von $\mathfrak{G}_{1,\ldots,q+2}$ kleiner ist als q.

$\mathfrak{G}$ umfasse $\mathfrak{A}_p$. Da $\mathfrak{G}$ einfach ist, haben wir dann $\mathfrak{G}=\mathfrak{A}_p$. Da der Normalisator einer p-Sylowgruppe von $\mathfrak{A}_p$ die Ordnung $p(p-1)/2$ besitzt, haben wir $q=(p-1)/2$ und wir sind fertig. Also sei $\mathfrak{A}_p$ nicht enthalten in $\mathfrak{G}$. Dann bewegt nach einem Satz von BOCHERT [1] jedes Element von $\mathfrak{G}$ mindestens $p/2-1$ Ziffern, da $\mathfrak{G}$ 4-fach transitiv ist. Da andererseits $\mathfrak{G}$ $2(q-1)$-fach transitiv ist, gibt es in $\mathfrak{G}$ ein Element $\neq E$, das höchstens $p-2q+3$ Ziffern versetzt. Also haben wir $\frac{p}{2}-1\leqq p-2q+3$. Daraus folgt $2q-5\leqq p-2q+3$, und wegen $q>2$ folgt $q-3<p-2q+3$.

Sei q gerade. Da $\mathfrak{G}$ $2(q-1)$-fach transitiv ist, gilt $|\mathfrak{G}_{1,\ldots,q+1}:\mathfrak{G}_{1,\ldots,2q-2}| = (p-q-1)\ldots(p-2q+3)$. Da $p-2q+3>q-3$ ist, gibt es, nach einem Satz von SYLVESTER-SCHUR [3], einen Primteiler l von $(p-q-1)\ldots(p-2q+3)$, der größer als $q-3$ ist. Andererseits ist jeder Primteiler von $(p-q-1)\ldots(p-2q+3)$ kleiner als q. Also muß $l=q-1$ sein. Sei L ein Element der Ordnung l aus $\mathfrak{G}_{1,\ldots,q+1}$. Dann gilt $\alpha_1(L)\geqq q+1$, $\alpha_{q-1}(L)>0$, und $\alpha_k(L)=0$ $(k\neq 1,\ q-1)$. Aus der Gleichung (*) folgern wir

$$\binom{\alpha_1(L)-1}{q}+(\alpha_1(L)-1)\,\alpha_{q-1}(L)=\frac{p-1}{q}\left\{\binom{\alpha_1(L)-2}{q-1}+\alpha_{q-1}(L)\right\}.$$

Wegen $\alpha_1(L)+(q-1)\alpha_{q-1}(L)=p$ und $\alpha_{q-1}(L)>0$ folgt daraus

$$(**)\qquad \alpha_1(L)-1=\frac{q-1}{q}\binom{\alpha_1(L)-2}{q-1}+\frac{p-1}{q}.$$

Wenn $\alpha_1(L)>q+3$ ist, haben wir wegen $q>2$

$$\binom{\alpha_1(L)-2}{q-1}\geqq(q-1)\,(\alpha_1(L)-2)\geqq 2(\alpha_1(L)-2).^{1})$$

Also folgt daraus

$$\alpha_1(L)-1\geqq\frac{2(q-1)}{q}\,(\alpha_1(L)-2)+\frac{p-1}{q}.$$

Das ist ein Widerspruch. Also muß $\alpha_1(L)\leqq q+3$ sein. Sei $\alpha_1(L)=q+3$. Dann folgt aus der Gleichung (**)

$$q+2=\frac{q-1}{q}\binom{q+1}{q-1}+\frac{p-1}{q}.$$

Daher haben wir

$$q+2=\frac{(q-1)(q+1)}{2}+\frac{p-1}{q}\geqq q+1+\frac{p-1}{q}.$$

Daraus folgt $q\geqq p-1$. Das ist ein Widerspruch. Sei $\alpha_1(L)=q+1$. Die Gleichung (**) ergibt dann

$$q=\frac{q-1}{q}+\frac{p-1}{q}.$$

Da $(p-1)/q$ ganz ist, ist das ein Widerspruch. Also muß $\alpha_1(L)=q+2$ sein. Aus der Gleichung (**) folgt nun

$$q+1=(q-1)+\frac{p-1}{q}.$$

Daher haben wir $p=2q+1$. Ein Satz von BOCHERT [1] liefert $\mathfrak{A}_p\leqq\mathfrak{G}$, was unserer Annahme $\mathfrak{A}_p\not\leqq\mathfrak{G}$ widerspricht.

[1]) Man kann leicht durch Induktion beweisen: Seien x und y ganze Zahlen, die größer als 2 sind. Dann gilt $\binom{x+y}{y}\geqq xy$.

Sei $q>3$ ungerade. Da $\mathfrak{G}$ $2(q-1)$-fach transitiv ist, gilt $|\mathfrak{G}_{1,\dots,q+2}:\mathfrak{G}_{1,\dots,2q-2}|=(p-q-2)\dots(p-2q+3)$. Also gibt es nach einem Satz von SYLVESTER-SCHUR [3] einen Primteiler l von $(p-q-2)\dots(p-2q+3)$, der größer als $q-4$ ist. Da andererseits jeder Primteiler von $(p-q-2)\dots(p-2q+3)$ kleiner als q ist, haben wir $l=q-2$. Sei L ein Element der Ordnung l aus $\mathfrak{G}_{1,\dots,q+2}$. Dann gilt $\alpha_1(L)\geqq q+2$, $\alpha_{q-2}(L)>0$ und $\alpha_k(L)=0$ $(k\neq 1, q-2)$. Aus der Gleichung (*) erhalten wir

$$\binom{\alpha_1(L)-1}{q}+\binom{\alpha_1(L)-1}{2}\alpha_{q-2}(L)$$

$$=\frac{p-1}{q}\left\{\binom{\alpha_1(L)-2}{q-1}+(\alpha_1(L)-1)\,\alpha_{q-2}(L)-\alpha_{q-2}(L)\right\}.$$

Daraus folgt

$$\binom{\alpha_1(L)-1}{2}\alpha_{q-2}(L)=\frac{p-\alpha_1(L)}{q}\binom{\alpha_1(L)-2}{q-1}+\frac{p-1}{q}(\alpha_1(L)-2)\,\alpha_{q-2}(L).$$

Da $\alpha_1(L)+(q-2)\alpha_{q-2}(L)=p$ und $\alpha_1(L)\geqq q+2>2$ ist, haben wir

$$(L)\qquad \frac{\alpha_1(L)-1}{2}=\frac{q-2}{q(q-1)}\binom{\alpha_1(L)-3}{q-2}+\frac{p-1}{q}.$$

Wir setzen $\alpha_1(L)>q+3$ voraus. Wegen $q\geqq 5$ gilt dann

$$\binom{\alpha_1(L)-3}{q-2}\geqq(q-2)\,(\alpha_1(L)-3).\ ^{2})$$

Also haben wir

$$(***)\qquad \frac{\alpha_1(L)-1}{2}\geqq\frac{(q-2)^2}{q(q-1)}(\alpha_1(L)-3)+\frac{p-1}{q}.$$

Daraus folgt für $q\geqq 9$

$$\alpha_1(L)<\frac{6(q^2-4q+4)}{q^2-7q+8}=3+\frac{3q-3}{q^2-7q+8}\,q.$$

Wegen $3q-3<q^2-7q+8$ für $q\geqq 9$ folgt daraus $\alpha_1(L)<q+3$. Das ist ein Widerspruch. Sei $q=7$. Dann geht (***) über in

$$\frac{\alpha_1(L)-1}{2}\geqq\frac{25}{42}(\alpha_1(L)-3)+\frac{p-1}{7}.$$

Daraus folgt

$$10\geqq\tfrac{2}{3}\alpha_1(L)+p.$$

Da $p\equiv 1$ modulo 7 und daher $p\geqq 29$ ist, ist das ein Widerspruch. Sei $q=5$. Dann liefert (***)

$$\frac{\alpha_1(L)-1}{2}\geqq\frac{9}{20}(\alpha_1(L)-3)+\frac{p-1}{5}.$$

---

[2]) Vgl. Fußnote 1, S.

Daraus folgt

$$\tfrac{21}{4} + \tfrac{1}{4}\alpha_1(L) \geqq p.$$

Wegen $\alpha_1(L) + 3\alpha_3(L) = p$ haben wir

$$7 \geqq p + \alpha_3(L).$$

Da $p \equiv 1$ modulo 5 und daher $p \geqq 11$ ist, ist das ein Widerspruch. Also muß $\alpha_1(L) \leqq q+3$ sein.

Sei $\alpha_1(L) = q+2$. Dann erhalten wir aus der Gleichung (L)

$$\frac{q+1}{2} = \frac{q-2}{q} + \frac{p-1}{q}.$$

Da q ungerade ist, ist $\frac{q+1}{2}$ ganz. Da auch $\frac{p-1}{q}$ ganz ist, folgt daß $\frac{q-2}{q}$ ganz ist. Das ist ein Widerspruch. Also muß $\alpha_1(L) = q+3$ sein. Gleichung (L) geht dann über in

$$\frac{q+2}{2} = \frac{q-2}{2} + \frac{p-1}{q}.$$

Daraus folgt $p = 2q+1$. Dann ergibt sich aus dem Satz von Bochert [1] $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{A}_p$, was unserer Annahme $\mathfrak{A}_p \nleqq \mathfrak{G}$ widerspricht.

Sei schließlich $q = 3$. Zunächst untersuchen wir die Gleichung $(*)$ für p-reguläre Elemente eingehender.

$$\binom{\alpha_1(G)-1}{3} - \big(\alpha_1(G)-1\big)\,\alpha_2(G) + \alpha_3(G)$$

$$= \frac{p-1}{3}\left\{1 + \binom{\alpha_1(G)-1}{2} - \alpha_2(G) - \big(\alpha_1(G)-1\big)\right\}.$$

Wir nehmen an, daß es ein p-reguläres Element G mit $\alpha_1(G) = 0$ gibt. Dann gilt

$$-1 + \alpha_2(G) + \alpha_3(G) = \frac{p-1}{3}\big(1 + 1 - \alpha_2(G) + 1\big).$$

Daraus folgt

$$\frac{p+2}{3}\alpha_2(G) + \alpha_3(G) = p.$$

Da $p \equiv 1$ modulo 3 und $2\,\alpha_2(G) + 3\alpha_3(G) + \cdots = p$ ist, haben wir $\alpha_2(G) = 2$, $\alpha_3(G) = \frac{p-4}{3}$ und $\alpha_k(G) = 0$ $(k \neq 2, 3)$. Also besitzt das Element G^3 die Zyklendarstellung der Gestalt $(ab)\,(cd)$. Da $\mathfrak{G}$ 4-fach transitiv ist, enthält $\mathfrak{G}$ auch ein Element $(cd)\,(eb)$ und daher auch (aeb). $\mathfrak{G}$ umfaßt dann die alternierende Gruppe $\mathfrak{A}_p$, was unserer Annahme $\mathfrak{A}_p \nleqq \mathfrak{G}$ widerspricht. Also gibt es kein p-reguläres Element G mit $\alpha_1(G) = 0$. Es sei G ein Element mit $\alpha_1(G) = 2$. Dann haben wir

$$-\alpha_2(G) + \alpha_3(G) = \frac{p-1}{3}\big(-\alpha_2(G)\big).$$

Daraus folgt $\alpha_2(G)=\alpha_3(G)=0$. Nun sei G ein Element mit $\alpha_1(G)=3$. Dann gilt

$$-2\alpha_2(G)+\alpha_3(G)=\frac{p-1}{3}\left(-\alpha_2(G)\right).$$

Daraus folgt

$$\frac{p-7}{3}\alpha_2(G)+\alpha_3(G)=0.$$

Wenn $p=7$ ist, ist es leicht zu zeigen $\mathfrak{G}=\mathfrak{A}_7$, was unserer Annahme $\mathfrak{A}_7 \nleqq \mathfrak{G}$ widerspricht. Also ist $p>7$ und es folgt $\alpha_2(G)=\alpha_3(G)=0$.

Nun bezeichne g_i die Anzahl der Elemente G von $\mathfrak{G}$ mit $\alpha_1(G)=i$ $(0\leqq i\leqq p)$. Da $\mathfrak{G}$ dreifach transitiv ist, haben wir bekanntlich (vgl. R. D. CARMICHAEL. Introduction to the Theory of Groups of Finite Order, Boston, 1937, p. 164)

$$\sum r\, g_r = g \quad (=\text{Ordnung von } G),$$

$$\sum r^2 g_r = 2g,$$

$$\sum r^3 g_r = 5g.$$

Daraus folgt

$$g_2=\sum_{r=4}^{p}\frac{r(r-1)(r-3)}{2}g_r.$$

Nun betrachten wir den irreduziblen Charakter X von $\mathfrak{S}_p$, der dem Young-Diagramm o o ... o o entspricht. Für jedes Element G aus $\mathfrak{S}_p$ gilt dann

$$X(G)=\frac{\alpha_1(G)\,(\alpha_1(G)-3)}{2}+\alpha_2(G).$$

Da $\mathfrak{G}$ 4-fach transitiv ist und X die Dimension zwei hat, bleibt X, nach FROBENIUS (I.1), irreduzibel auch auf $\mathfrak{G}$. Da der Grad von X gleich $\frac{p(p-3)}{2}$ ist, gehört X zu einem p-Block mit Defekt 0. Also nach den Orthogonalitätsrelationen der Gruppencharaktere haben wir

$$\sum_{G\in\mathfrak{G}} X(G)\,\chi_1(G)=0.$$

Da $X(G)$ für p-singuläre Elemente verschwindet, folgt daraus

$$\sum_{G\ p\text{-regulär}} X(G)\,\chi_1(G)=0.$$

Da $\chi_1(G)=\alpha_1(G)-1$ für alle Elemente G mit $\alpha_1(G)=1$ verschwindet, folgt daraus

$$\sum_{G \text{ mit } \alpha_1(G)\geqq 2}\left\{\frac{\alpha_1(G)\,(\alpha_1(G)-3)}{2}+\alpha_2(G)\right\}\left(\alpha_1(G)-1\right)=0.$$

Weil $\alpha_2(G)=0$ ist für alle Elemente G mit $\alpha_1(G)=2$ oder $=3$, so gilt

$$\sum_{G \text{ mit } \alpha_1(G)=2} 1=\sum_{G \text{ mit } \alpha_1(G)\geqq 4}\frac{\alpha_1(G)\,(\alpha_1(G)-1)\,(\alpha_1(G)-3)}{2}+\sum_{G \text{ mit } \alpha_1(G)\geqq 4}\alpha_2(G)\left(\alpha_1(G)-1\right)$$

Da die linke Seite dieser Gleichung gleich g_2 ist, und da das erste Glied der rechten Seite dieser Gleichung gleich $\sum_{r \geqq 4}^{p} \frac{r(r-1)(r-3)}{2} g_r$ ist, haben wir schließlich

$$\sum_{G \text{ mit } \alpha_1(G) \geqq 4} \alpha_2(G) \left(\alpha_1(G) - 1\right) = 0.$$

Daraus folgt $\alpha_2(G) = 0$ für alle Elemente G mit $\alpha_1(G) \geqq 4$. Also ergibt es sich $\alpha_2(G) = 0$ für alle Elemente G mit $\alpha_1(G) \geqq 2$. Da $\mathfrak{G}$ 4-fach transitiv ist, ist das ein Widerspruch.

Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

Literatur

[1] Bochert, A.: Über die Classe der transitiven Substitutionengruppen. Math. Ann. **40**, 176—193 (1892).

[2] Brauer, R.: On permutation groups of prime degree and related classes of groups. Ann. of Math. **44**, 57—79 (1943).

[3] Erdös, P.: A theorem of Sylvester and Schur. J. London M. S. **9**, 282—288 (1934).

[4] Frobenius, G.: Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe. Sitzb. d. preuß. Akad. d. Wiss. 516—534 (1900).

[5] Frobenius, G.: Über die Charaktere der mehrfach transitiven Gruppen. Sitzb. d. preuß. Akad. d. Wiss. 528—571 (1904).

[6] Huppert, B., u. H. Wielandt: Normalteiler mehrfach transitiver Permutationsgruppen. Arch. Math. **9**, 18—26 (1958).

[7] Itô, N.: Zur Theorie der transitiven Gruppen vom Grad p. Math. Z. **74**, 299—301 (1960).

Department of Mathematics. Nagoya University, Chikusa-ku, Nagoya, Japan

(Eingegangen am 20. Juli 1960)

CARTER, R. W.
Math. Zeitschr. 75, 136—139 (1961)

Nilpotent self-normalizing subgroups of soluble groups

To HELMUT WIELANDT on his 50th birthday, 19th December 1960

By

ROGER W. CARTER*)

1. The purpose of the present note is to prove the following theorem: *Every finite soluble group possesses nilpotent subgroups which are their own normalizers, and all such subgroups are conjugate.* We shall also describe the simplest properties of the nilpotent self-normalizing subgroups.

I would like to thank Professor WIELANDT and Professor P. HALL for their help in the formulation of the main theorem in its present general form and in the construction of the proof.

The notation used will be as follows. $\{A, B\}$ is the subgroup generated by A, B. $\mathsf{N}(A)$ is the normalizer of A. $[a, b]=a^{-1}b^{-1}ab$ is the commutator of a, b and $[A, B]$ is the subgroup generated by all commutators $[a, b]$ with $a\in A$ and $b\in B$. A Hall subgroup of G is one whose order and index in G are coprime. All groups discussed will be finite.

2. DEFINITION. H is an *abnormal* subgroup of G if $g\in\{H, g^{-1}Hg\}$ for every element $g\in G$.

LEMMA. *H is abnormal in G if and only if it satisfies the following two conditions:*

(i) *Every subgroup of G containing H is its own normalizer.*

(ii) *H is not contained in two different conjugate subgroups of G.*

Suppose H is abnormal in G and let $K\geqq H$. Let g be in the normalizer of K. Then

$$g\in\{H, g^{-1}Hg\}\leqq\{K, g^{-1}Kg\}=K.$$

Therefore K is its own normalizer.

Let $H\leqq K\cap gKg^{-1}$. Then $g\in\{H, g^{-1}Hg\}\leqq K$. Therefore $gKg^{-1}=K$ and H is not contained in two different conjugate subgroups.

Conversely suppose H satisfies the conditions (i), (ii). Let $K=\{H, g^{-1}Hg\}$. Then $H\leqq K\cap gKg^{-1}$. Therefore $gKg^{-1}=K$, by (ii). Hence $g\in K$, by (i), and $g\in\{H, g^{-1}Hg\}$ for all $g\in G$. Thus H is abnormal in G.

LEMMA. *Let G be soluble and M be the normalizer of a Hall subgroup S of G. Then M is abnormal in G.*

*) The author is indebted to the Alexander von Humboldt Stiftung for a research scholarship while the present work was carried out in Tübingen.

Let $K=\{M, g^{-1}Mg\}$. $S, g^{-1}Sg$ are Hall subgroups of K of the same order and are therefore conjugate in K. $g^{-1}Sg=k^{-1}Sk$ for some $k\in K$. Thus $gk^{-1}\in M\leqq K$ and $g\in K$.

3. We first prove the existence of nilpotent self-normalizing subgroups in a soluble group G by induction on the order of G.

Let N be a minimal normal subgroup of G; thus N has order p^α for some prime p. By inductive hypothesis G/N has a nilpotent self-normalizing subgroup K/N. K has a unique Sylow p-subgroup K_p. For every Sylow p-subgroup of K contains N, but K/N is nilpotent and so has a unique Sylow p-subgroup. Let K^p be a Sylow p-complement of K and H its normalizer in K. We show that H is a nilpotent self-normalizing subgroup of G.

Let $H_p=H\cap K_p$. H_p is the unique Sylow p-subgroup of H. For H_p is a normal subgroup of H and is a p-group; on the other hand

$$|H:H_p|=|HK_p:K_p|=|K:K_p|,$$

which is prime to p.

H has also a normal Sylow p-complement K^p, thus $H=H_p\times K^p$. K^p is isomorphic to K/K_p, which is a factor group of the nilpotent group K/N. Therefore K^p is nilpotent and H also.

Now H is abnormal in K, as the normalizer of a Hall subgroup of K. In particular NH is its own normalizer in K and NH/N is its own normalizer in K/N. But K/N is nilpotent, therefore $NH=K$.

Let g be in the normalizer of H in G. g normalizes N also; thus g normalizes $NH=K$. But K is its own normalizer in G, for K/N is its own normalizer in G/N. Therefore $g\in K$. But H is its own normalizer in K, thus $g\in H$. Therefore H is its own normalizer in G.

4. We now prove the conjugacy of any two nilpotent self-normalizing subgroups, also by induction on the order of G.

Let H be a nilpotent self-normalizing subgroup of G and let $g\in G$. Let $K=\{H, g^{-1}Hg\}$. We show that $g\in K$. This is trivial if $K=G$; we may therefore assume that K is a proper subgroup of G. $H, g^{-1}Hg$ are nilpotent self-normalizing subgroups of K and are therefore conjugate in K by inductive hypothesis: $g^{-1}Hg=k^{-1}Hk$ for some $k\in K$. Hence $gk^{-1}\in \mathsf{N}(H)=H\leqq K$, and $g\in K$. Therefore $g\in\{H, g^{-1}Hg\}$ and H is abnormal in G.

Let N be a normal subgroup of G. Then NH is its own normalizer in G, so that NH/N is its own normalizer in G/N. NH/N is clearly nilpotent, being isomorphic to the factor group $H/N\cap H$ of the nilpotent group H. Thus we have shown, using the inductive hypothesis, that NH/N is a nilpotent self-normalizing subgroup of G/N.

Let H_1, H_2 be nilpotent self-normalizing subgroups of G and let N be a minimal normal subgroup of G. Then NH_1/N, NH_2/N are nilpotent self-normalizing subgroups of G/N and are therefore conjugate in G/N by inductive

hypothesis. Thus NH_1, NH_2 are conjugate in G. We can therefore find an element which transforms H_2 into a subgroup H_2^* of G such that $NH_1=NH_2^*$, and it is sufficient to show that H_1, H_2^* are conjugate. Thus we may assume that $NH_1=NH_2$. We may also assume that $NH_1=NH_2=G$. For if $NH_1=NH_2<G$, H_1 and H_2 are nilpotent self-normalizing subgroups of NH_1 and are conjugate in NH_1 by inductive hypothesis.

Now $N\cap H_1$ is normal in H_1 and also in N, so is normal in $NH_1=G$. Thus $N\cap H_1=N$ or $N\cap H_1=1$. If $N\cap H_1=N$, we have $H_1=NH_1=G$ and the theorem is trivial. Thus we may assume that $N\cap H_1=N\cap H_2=1$, so that H_1, H_2 are complements of N in G.

Let $|N|=p^\alpha$. Then $|G:H_1|=|G:H_2|=p^\alpha$. H_1, H_2 are maximal subgroups of G; for if M were a subgroup between H_1 and G, $M\cap N$ would be a normal subgroup of G between N and 1, which is impossible.

Let H_1^p, H_2^p be the Sylow p-complements of H_1, H_2 respectively. Then H_1^p, H_2^p are Sylow p-complements of G and are therefore conjugate in G: $H_1^p=g^{-1}H_2^pg$ for some $g\in G$.

Suppose $H_1\neq g^{-1}H_2g$. H_1^p is the Sylow p-complement of the nilpotent groups H_1, $g^{-1}H_2g$ and is therefore normal in these groups. Hence H_1^p is normal in their join, which is G since H_1 is maximal in G. G/H_1^p is a p-group and contains a proper subgroup H_1/H_1^p which is its own normalizer. This is a contradiction; therefore $H_1=g^{-1}H_2g$ and H_1, H_2 are conjugate in G.

5. The following properties of nilpotent self-normalizing subgroups are consequences of the proof of the main theorem:

(a) *Every nilpotent self-normalizing subgroup of a soluble group is abnormal.*

(b) *If H is a nilpotent self-normalizing subgroup of G and N is normal in G, then NH/N is nilpotent and self-normalizing in G/N.*

Thus the conjugacy class of nilpotent self-normalizing subgroups is preserved under a homomorphism.

(c) *Every nilpotent self-normalizing subgroup of a soluble group G contains a system normalizer of G.*

This follows from the theorem of P. HALL [1] that every subgroup which can be joined to G by a chain of subgroups, each maximal but not normal in the next, contains a system normalizer. Every abnormal subgroup clearly has this chain property.

The soluble groups whose system normalizers are self-normalizing have been investigated by the author in his paper [2].

6. The nilpotent self-normalizing subgroups satisfy a covering and avoidance theorem similar to that proved for the system normalizers by P. HALL [1]. HALL showed that a system normalizer of a soluble group covers all central chief factors of the group and avoids all eccentric chief factors.

We recall the definitions of covering and avoidance. Let K/L be a *factor* of G; i.e. K, L are subgroups of G and L is a normal subgroup of K. Let X be any subgroup of G. Then $L(K\cap X)$ is a subgroup of G between K and L. X *covers* K/L if $L(K\cap X)=K$ and X *avoids* K/L if $L(K\cap X)=L$.

Let H be a nilpotent self-normalizing subgroup of the soluble group G, and let K/L be a factor of G. K/L is called an *H-factor* if $H \leqq \mathsf{N}(K) \cap \mathsf{N}(L)$. K/L is called an *irreducible H-factor* if, in addition, there is no subgroup M such that $K > M > L$ and $H \leqq \mathsf{N}(M)$. An irreducible H-factor K/L may be considered as a group with operators, the operators being transformations by elements of H. K/L then has the property that no proper subgroup is compatible with the operators. An irreducible H-factor K/L is clearly elementary abelian, since any characteristic subgroup of K/L would be compatible with the operators.

An H-factor K/L is called *central* if $[K, H] \leq L$; this means that all the operators act trivially on K/L. Otherwise K/L is called *eccentric*.

The nilpotent self-normalizing subgroups H satisfy the following covering and avoidance theorem:

H covers all central irreducible H-factors and avoids all eccentric irreducible H-factors.

Let K/L be any irreducible H-factor. $L(K \cap H)$ is a subgroup of G between K and L, and H is in the normalizer of this subgroup. Therefore $L(K \cap H) = K$ or $L(K \cap H) = L$, since K/L is irreducible. Thus H either covers or avoids K/L.

Suppose H covers K/L. Then $|K \cap H : L \cap H| = |K : L|$. $K \cap H/L \cap H$ is a chief factor of H. For $K \cap H$, $L \cap H$ are normal subgroups of H; but if there were a normal subgroup M of H between $K \cap H$ and $L \cap H$, LM would be a subgroup between K and L which is normalized by H, contradicting the irreducibility of K/L.

Now H is nilpotent, therefore every chief factor of H is central. Hence $[K \cap H, H] \leqq L \cap H$. Let $k \in K$, $h \in H$. Then $k = ml$, where $m \in K \cap H$, $l \in L$. We have

$$[k, h] = [ml, h] = l^{-1} \cdot [m, h] \cdot h^{-1} l h .$$

Now $[m, h] \in L$ and $h^{-1} l h \in L$. Thus $[k, h] \in L$. Hence $[K, H] \leqq L$ and K/L is a central H-factor.

Conversely, suppose H avoids K/L. Then KH, LH are subgroups of G and $|KH : LH| = |K : L|$. Suppose K/L were a central H-factor. Then $[K, H] \leqq L$. Let $l \in L$, $h \in H$, $k \in K$. Then

$$k^{-1} \cdot l h \cdot k = k^{-1} l k \cdot h \cdot [h, k] .$$

Now $k^{-1} l k \in L$ and $[h, k] \in L$. Hence $k^{-1} \cdot l h \cdot k \in LH$. K is in the normalizer of LH. Thus LH is normal in KH. But H is abnormal in G, so we have a contradiction. Therefore K/L is an eccentric H-factor.

References

[1] Hall, P.: On the system normalizers of a soluble group. Proc. London Math. Soc. (2) **43**, 507–528 (1937).

[2] Carter, R. W.: On a class of finite soluble groups. Proc. London Math. Soc. (3) **9**, 623–640 (1959).

Dept. of Math., King's College, Newcastle upon Tyne (England)

(Eingegangen am 20. September 1960)

HUPPERT, B.
Math. Zeitschr. 75, 140—153 (1961)

Gruppen mit modularer Sylow-Gruppe

Herrn HELMUT WIELANDT zum 50. Geburtstag am 19. Dezember 1960 gewidmet

Von

BERTRAM HUPPERT*

In einer vorhergehenden Arbeit (HUPPERT [5]) war die Normalstruktur einer Gruppe $\mathfrak{G}$ mit abelscher p-Sylow-Gruppe $\mathfrak{P}$ untersucht worden. Die Ergebnisse wurden zum großen Teil als Aussagen über den Verband $s_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P}$ der Durchschnitte der subnormalen Untergruppen von $\mathfrak{G}$ mit der festen p-Sylow-Gruppe $\mathfrak{P}$ ausgedrückt. In der vorliegenden Note werden diese Resultate ausgedehnt auf Gruppen $\mathfrak{G}$ mit einer modularen p-Sylow-Gruppe ($p>2$). Ein Teil der Überlegungen aus [5] läßt sich übertragen, die meisten Beweise erfordern jedoch genauere Betrachtungen als der in [5] vorwiegend behandelte Fall einer abelschen p-Sylow-Gruppe.

In §1 beweisen wir einige Hilfssätze über Automorphismen von regulären p-Gruppen, welche vielleicht unabhängig von den vorliegenden Anwendungen Interesse finden dürften. Der §2 bringt die später benötigten Aussagen über modulare p-Gruppen. In §3 verallgemeinern wir den Hauptsatz von TAUNT [7] über Gruppen mit lauter abelschen Sylow-Gruppen auf Gruppen mit modularen Sylow-Gruppen. Die Verallgemeinerung lautet: Sind die p-Sylow-Gruppen von $\mathfrak{G}$ modular für $p>2$ und ist die 2-Sylow-Gruppe abelsch, ist ferner $K_\infty(\mathfrak{G})$ der kleinste Normalteiler von $\mathfrak{G}$ mit nilpotenter Faktorgruppe, so gilt $Z(\mathfrak{G})\cap K_\infty(\mathfrak{G})=\mathfrak{E}$. Ferner zeigen wir in §3: Ist $\mathfrak{G}$ p-auflösbar mit regulärer p-Sylow-Gruppe, so ist die p-Länge von $\mathfrak{G}$ höchstens 2; die p-Länge ist 1, wenn p keine Fermatsche Primzahl ist. In §4 folgt sodann die Übertragung der Hauptergebnisse aus [5]. Wir erwähnen hier nur: $\mathfrak{G}$ habe modulare p-Sylow-Gruppe $\mathfrak{P}$ und es sei $p>2$. Sei $\mathfrak{T}$ der kleinste Normalteiler von $\mathfrak{G}$ mit p-auflösbarer Faktorgruppe. Dann enthält $\mathfrak{T}$ keinen Kompositionsfaktor der Ordnung p. Ferner zerfällt $\mathfrak{P}$ über $\mathfrak{Q}=\mathfrak{P}\cap\mathfrak{T}$ und es gilt $\mathfrak{Q}=\mathfrak{P}_1\times\cdots\times\mathfrak{P}_s$, wobei die $\mathfrak{P}_i$ isomorph zu p-Sylow-Gruppen von Kompositionsfaktoren von $\mathfrak{G}$ sind. Für metazyklisches, nichtabelsches $\mathfrak{P}$ lassen sich die Ergebnisse noch verschärfen zu einer abschließenden Übersicht über die möglichen Verbände $s_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P}$.

Wir verwenden durchweg die gleichen Bezeichnungen wie in [5]. Ist $\mathfrak{P}$ eine reguläre p-Gruppe, so bezeichnen wir (nach P. HALL [1]) mit $\Omega_i(\mathfrak{P})$ die Untergruppe der Elemente $X\in\mathfrak{P}$ mit $X^{p^i}=E$ und mit $\mathfrak{O}_i(\mathfrak{P})$ die Untergruppe der p^i-ten Potenzen von Elementen aus $\mathfrak{P}$ (bekanntlich bilden in einer regulären p-Gruppe die Lösungen von $X^{p^i}=E$ und die p^i-ten Potenzen Untergruppen;

*) Ein großer Teil dieser Untersuchung wurde durchgeführt, während der Autor 1958/59 als British Council Scholar in Manchester weilte.

s. P. Hall [1]). Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Untergruppen von $\mathfrak{G}$, so sei $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ die von allen Kommutatoren (A, B) mit $A \in \mathfrak{A}$ und $B \in \mathfrak{B}$ erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{G}$.

§ 1. Automorphismen von regulären p-Gruppen

1.1 Definition. *Sei $\mathfrak{P}$ eine p-Gruppe, $\mathfrak{A}$ eine Gruppe von Automorphismen von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{N}$ ein bei $\mathfrak{A}$ fester Normalteiler von $\mathfrak{P}$. Sei $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0 \rhd \mathfrak{P}_1 \rhd \cdots \rhd \mathfrak{P}_k = \mathfrak{N}$ eine Kompositionsreihe von $\mathfrak{P}$ bis $\mathfrak{N}$ bezüglich des aus den inneren Automorphismen von $\mathfrak{P}$ und aus $\mathfrak{A}$ bestehenden Operatorenbereiches. Dann sind die Faktorgruppen $\mathfrak{P}_i/\mathfrak{P}_{i-1}$ charakteristisch einfach, also elementar abelsch; sie werden ferner von $\mathfrak{P}$ zentralisiert. Wir nennen die Gruppen $\mathfrak{P}_i/\mathfrak{P}_{i+1}$ die irreduziblen Teile von $\mathfrak{P}/\mathfrak{N}$, die darauf induzierten Darstellungen von $\mathfrak{A}$ die irreduziblen Komponenten von $\mathfrak{A}$. Nach dem Satz von* Jordan-Hölder *für Gruppen mit Operatoren sind die $\mathfrak{P}_i/\mathfrak{P}_{i-1}$ und die irreduziblen Komponenten von $\mathfrak{A}$ bis auf die Anordnung und bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt* [1]).

1.2. Satz. *Sei $\mathfrak{P}$ eine reguläre p-Gruppe (im Sinne von* P. Hall*) und $\mathfrak{A}$ eine Gruppe von Automorphismen von $\mathfrak{P}$. Dann hat $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{P}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})$ und $\Omega_1(\mathfrak{P})$ die gleichen irreduziblen Komponenten.*

Beweis. a) Hat $\mathfrak{P}$ den Exponenten p, so ist offenbar nichts zu beweisen. Sei zunächst $\mathfrak{P}$ vom Exponenten p^2. Es sei ferner $\mathfrak{P}/\mathfrak{N}$ bezüglich $\mathfrak{A}$ irreduzibel und $\mathfrak{P} > \mathfrak{N} \geqq \Omega_1(\mathfrak{P})$. Dann ist $\mathfrak{P}' \leqq \mathfrak{N}$. Wir betrachten nun die Faktorgruppe $\overline{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{N})$.

Die Abbildung $\overline{X} \to \overline{X}^p$ ist ein $\mathfrak{A}$-Homomorphismus von $\overline{\mathfrak{P}}$ in $\mathfrak{O}_1(\overline{\mathfrak{P}})$: Denn aus $\mathfrak{O}_1(\overline{\mathfrak{P}}') \leqq \mathfrak{O}_1(\overline{\mathfrak{N}}) = \overline{\mathfrak{E}}$ folgt, daß $\overline{\mathfrak{P}}'$ den Exponenten p hat. Nun ergibt die Regularität

$$(\overline{X}\,\overline{Y})^p \equiv \overline{X}^p \overline{Y}^p \mod \mathfrak{O}_1(\overline{\mathfrak{P}}'),$$

also $(\overline{X}\,\overline{Y})^p = \overline{X}^p \overline{Y}^p$. Somit ist die Potenzierung mit p ein Homomorphismus, sodann natürlich auch ein $\mathfrak{A}$-Homomorphismus. Der Kern enthält sicher $\overline{\mathfrak{N}}$. Der Homomorphismus ist nichttrivial: Denn sonst wäre $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P}) = \mathfrak{O}_1(\mathfrak{N})$, d. h. für jedes $P \in \mathfrak{P}$ hätten wir $P^p = N^p$ mit einem geeigneten $N \in \mathfrak{N}$. Nach P. Hall folgt in einer regulären p-Gruppe daraus aber $(PN^{-1})^p = E$ (s. [1], S. 77, theorem 4.28), also $PN^{-1} \in \Omega_1(\mathfrak{P}) \leqq \mathfrak{N}$ und dann $P \in \mathfrak{N}$, also $\mathfrak{P} = \mathfrak{N}$ entgegen unserer Annahme. Da der $\mathfrak{A}$-Homomorphismus nicht der triviale Homomorphismus ist, $\overline{\mathfrak{P}}/\overline{\mathfrak{N}}$ aber ein einfacher $\mathfrak{A}$-Modul ist, haben wir einen Isomorphismus von $\overline{\mathfrak{P}}/\overline{\mathfrak{N}}$ in $\mathfrak{O}_1(\overline{\mathfrak{P}})$. Dieser ist sogar ein Isomorphismus auf $\mathfrak{O}_1(\overline{\mathfrak{P}})$: Es gilt nämlich $\Omega_1(\overline{\mathfrak{P}}) = \overline{\mathfrak{N}}$; denn sicher ist $\overline{\mathfrak{N}} \leqq \Omega_1(\overline{\mathfrak{P}})$, aber $\Omega_1(\overline{\mathfrak{P}}) \leqq \overline{\mathfrak{N}}$ wurde soeben gezeigt. Da $\overline{\mathfrak{P}}$ regulär ist, erhalten wir

$$|\overline{\mathfrak{P}}| = |\overline{\mathfrak{P}}/\mathfrak{O}_1(\overline{\mathfrak{P}})|\,|\mathfrak{O}_1(\overline{\mathfrak{P}})| = |\Omega_1(\overline{\mathfrak{P}})|\,|\mathfrak{O}_1(\overline{\mathfrak{P}})| = |\overline{\mathfrak{N}}|\,|\mathfrak{O}_1(\overline{\mathfrak{P}})|,$$

daher $|\overline{\mathfrak{P}}/\overline{\mathfrak{N}}| = |\mathfrak{O}_1(\overline{\mathfrak{P}})|$.

Wir haben damit einen $\mathfrak{A}$-Isomorphismus von $\mathfrak{P}/\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{N})$ nachgewiesen. Nun können wir diese Konstruktion wiederholen. Dies ergibt eine $\mathfrak{A}$-Kompositionsreihe $\mathfrak{P} = \mathfrak{N}_0 \rhd \mathfrak{N}_1 \rhd \cdots \rhd \mathfrak{N}_s = \Omega_1(\mathfrak{P})$ und die $\mathfrak{A}$-Isomorphismen

[1]) Darstellungen auf beliebigen (nicht notwendig abelschen) Gruppen wurden zum ersten Male von Wielandt in [10] eingeführt.

$\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1} \cong \mathfrak{O}_1(\mathfrak{N}_i)/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{N}_{i+1})$. Die Kette $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P}) = \mathfrak{O}_1(\mathfrak{N}_0) \rhd \mathfrak{O}_1(\mathfrak{N}_1) \rhd \cdots \rhd \mathfrak{O}_1(\mathfrak{N}_k) = \mathfrak{E}$ ist daher eine $\mathfrak{A}$-Kompositionsreihe von $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})$. Das verbleibende Stück $\Omega_1(\mathfrak{P})/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})$ (beachte, daß $\mathfrak{P}$ den Exponenten p^2 hat!) ist $\mathfrak{P}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})$ und $\Omega_1(\mathfrak{P})$ gemeinsam.

b) Wir zeigen nun, daß für $i \geqq 2$ die irreduziblen Komponenten von $\mathfrak{A}$ auf $\Omega_i(\mathfrak{P})/\mathfrak{O}_1(\Omega_i(\mathfrak{P}))$ und $\Omega_{i-1}(\mathfrak{P})/\mathfrak{O}_1(\Omega_{i-1}(\mathfrak{P}))$ die gleichen sind. Dazu betrachten wir $\mathfrak{P}^* = \Omega_i(\mathfrak{P})/\mathfrak{O}_1(\Omega_{i-1}(\mathfrak{P}))$. Offenbar hat $\mathfrak{P}^*$ den Exponenten p^2, ferner ist $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P}^*) = \mathfrak{O}_1(\Omega_i(\mathfrak{P}))/\mathfrak{O}_1(\Omega_{i-1}(\mathfrak{P}))$. Wir behaupten $\Omega_1(\mathfrak{P}^*) = \Omega_{i-1}(\mathfrak{P})/\mathfrak{O}_1(\Omega_{i-1}(\mathfrak{P}))$:

Sei $X \in \Omega_i(\mathfrak{P})$, $X^p \in \mathfrak{O}_1(\Omega_{i-1}(\mathfrak{P}))$. Dann ist $X^p = Y^p$ mit einem geeigneten $Y \in \Omega_{i-1}(\mathfrak{P})$. Dies ergibt

$$X^{p^{i-1}} = Y^{p^{i-1}} = E,$$

also $X \in \Omega_{i-1}(\mathfrak{P})$. Wenden wir jetzt a) auf $\mathfrak{P}^*$ an, so erhalten wir den $\mathfrak{A}$-Isomorphismus

$$\Omega_i(\mathfrak{P})/\mathfrak{O}_1(\Omega_i(\mathfrak{P})) \cong \mathfrak{P}^*/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P}^*) \cong \Omega_1(\mathfrak{P}^*) = \Omega_{i-1}(\mathfrak{P})/\mathfrak{O}_1(\Omega_{i-1}(\mathfrak{P})).$$

Dies ist die Behauptung.

1.3. SATZ. *Sei $\mathfrak{P}$ eine reguläre p-Gruppe und $\mathfrak{A}$ eine Gruppe von Automorphismen von $\mathfrak{P}$ von zu p teilerfremder Ordnung. Dann ist die Anzahl der Fixpunkte von $\mathfrak{A}$ in $\Omega_1(\mathfrak{P})$ dieselbe wie die Anzahl der Fixpunkte von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{P}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})$.*

BEWEIS. Seien $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0 \rhd \mathfrak{P}_1 \rhd \cdots \rhd \mathfrak{P}_k = \mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})$ und $\Omega_1(\mathfrak{P}) = \mathfrak{N}_0 \rhd \mathfrak{N}_1 \rhd \cdots \rhd \mathfrak{N}_k = \mathfrak{E}$ $\mathfrak{A}$-Kompositionsreihen von $\mathfrak{P}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})$ bzw. $\Omega_1(\mathfrak{P})$. Erfährt $\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1}$ den identischen Automorphismus unter $\mathfrak{A}$, so gilt $(N\mathfrak{N}_{i+1})^A = N\mathfrak{N}_{i+1}$ für alle $N \in \mathfrak{N}_i$ und alle $A \in \mathfrak{A}$. Nach WIELANDT ([10], Hilfssatz 4.1) gibt es dann ein Element F aus der Fixgruppe $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{A}$ in $\Omega_1(\mathfrak{P})$ mit $F\mathfrak{N}_{i+1} = N\mathfrak{N}_{i+1}$. Also ist $\mathfrak{N}_i = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_i)\,\mathfrak{N}_{i+1}$ und somit folgt $|\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1}| = |\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_i/\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_{i+1}|$. Bewirkt aber $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1}$ nicht den identischen Automorphismus, so gibt es auf $\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1}$ keinen Fixpunkt von $\mathfrak{A}$ (außer E), also ist $\mathfrak{N}_i \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{i+1} \cap \mathfrak{F}$. Nun erhalten wir

$$|\mathfrak{F}| = \prod_i |\mathfrak{N}_i \cap \mathfrak{F}/\mathfrak{N}_{i+1} \cap \mathfrak{F}| = \prod\nolimits^* |\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1}|,$$

wobei das Produkt $\prod^*$ nur über diejenigen $\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1}$ zu erstrecken ist, auf denen $\mathfrak{A}$ den identischen Automorphismus bewirkt. Nach 1.2 ist aber $\prod^* |\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1}| = \prod^* |\mathfrak{P}_i/\mathfrak{P}_{i+1}|$ und das rechtsstehende Produkt ist die Ordnung der Fixgruppe von $\mathfrak{P}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})$ bezüglich $\mathfrak{A}$.

Der folgende Hilfssatz wird später nützlich sein:

1.4. HILFSSATZ. *$\mathfrak{P}$ sei eine reguläre p-Sylow-Gruppe von $\mathfrak{G}$. Der Normalisator von $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{G}$ sei $\mathfrak{P}\mathfrak{S}$ mit $p \nmid |\mathfrak{S}|$. Ferner sei $\mathfrak{P}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})$ abelsch und die Ordnung der Gruppe der Fixelemente unter $\mathfrak{S}$ in $\Omega_1(\mathfrak{P})$ (oder in $\mathfrak{P}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})$) sei p^k. Dann hat $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ vom Index p^k.*

BEWEIS. Nach 1.3 ist die Ordnung der Fixuntergruppe $\overline{\mathfrak{F}}$ bezüglich $\mathfrak{S}$ in $\overline{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})$ gleich p^k. Da die Ordnung von $\mathfrak{S}$ zu p teilerfremd ist, können wir nach dem Satz von MASCHKE zu $\overline{\mathfrak{F}}$ in $\overline{\mathfrak{P}}$ ein bei $\mathfrak{S}$ invariantes Komplement

$\overline{\mathfrak{R}}$ finden. Also ist $\overline{\mathfrak{P}} = \overline{\mathfrak{F}} \times \overline{\mathfrak{R}}$. Da $\overline{\mathfrak{F}}$ bei $\mathfrak{S}$ elementweise fest bleibt, folgt $(\mathfrak{S}, \mathfrak{P}) \leqq \mathfrak{R}$, wobei $\mathfrak{R}$ das Urbild von $\overline{\mathfrak{R}}$ in $\mathfrak{P}$ ist. Nach unserer Voraussetzung ist $\mathfrak{P}' \leqq \mathfrak{O}_1(\mathfrak{P}) \leqq \mathfrak{R}$, also $\mathfrak{R} \lhd \mathfrak{P}$. Nun ist $\mathfrak{R}\mathfrak{S}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{P}\mathfrak{S} = N(\mathfrak{P})$ vom Index p^k. Nach einem Satz von WIELANDT ([8], S. 189, Satz 5) folgt unter Ausnutzung der Regularität von $\mathfrak{P}$ die Existenz eines Normalteilers $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{N} \cap N(\mathfrak{P}) = \mathfrak{R}\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{N}\mathfrak{P} = \mathfrak{G}$. Dies ergibt $|\mathfrak{G}/\mathfrak{N}| = |\mathfrak{P}/\mathfrak{R}| = p^k$.

1.5. SATZ. *Die p-Sylow-Gruppe $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}$ sei metazyklisch (d.h. zyklische Erweiterung einer zyklischen Gruppe), nichtabelsch, ferner $p > 2$. Dann hat $\mathfrak{G}$ eine nichttriviale p-Faktorgruppe.*

BEWEIS. a) Sei $\mathfrak{S}$ eine Gruppe von Automorphismen von $\mathfrak{P}$ von zu p teilerfremder Ordnung. $\mathfrak{P}$ ist regulär und die Gruppen $\Omega_1(\mathfrak{P})$ und $\mathfrak{P}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})$ sind elementar abelsch vom Typ (p, p). Da $\mathfrak{P}'$ zyklisch ist, ist $\Omega_1(\mathfrak{P}')$ eine bei $\mathfrak{S}$ invariante Untergruppe von $\Omega_1(\mathfrak{P})$. Somit hat $\mathfrak{S}$ auf $\Omega_1(\mathfrak{P})$ eindimensionale irreduzible Teile $\lambda_1(S)$ und $\lambda_2(S)$. Nach Satz 1.3 gilt dasselbe für $\mathfrak{P}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})$, und dort ist $\mathfrak{S}$ nach dem Satz von MASCHKE vollständig reduzibel. Also gibt es Erzeugende X_1 und X_2 von $\mathfrak{P}$ mit $X_i^S \equiv X_i^{\lambda_i(S)} \bmod \mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})$. Wir betrachten nun $\overline{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P}')$. Wegen $|\overline{\mathfrak{P}}'| = p$ hat $\overline{\mathfrak{P}}$ die Klasse 2. Dann gilt für alle $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathfrak{P}$ bekanntlich die Gleichung $(\overline{X}, \overline{Y}^p) = (\overline{X}, \overline{Y})^p = E$; also ist $\mathfrak{O}_1(\overline{\mathfrak{P}}) \leqq Z(\overline{\mathfrak{P}})$. Daher folgt

$$(\overline{X}_1, \overline{X}_2)^S = (\overline{X}_1^{\lambda_1(S)}, \overline{X}_2^{\lambda_2(S)}) = (\overline{X}_1, \overline{X}_2)^{\lambda_1(S)\,\lambda_2(S)}.$$

Da $(\overline{X}_1, \overline{X}_2)$ ganz $\overline{\mathfrak{P}}'$ erzeugt, erfährt $\mathfrak{P}'/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P}')$ unter $\mathfrak{S}$ die Darstellung $\lambda_1(S)\,\lambda_2(S)$. Nach 1.2 erleidet dann $\Omega_1(\mathfrak{P}')$ die gleiche Darstellung, d.h. $\lambda_1(S)\,\lambda_2(S)$ ist ein irreduzibler Teil von $\mathfrak{S}$ auf $\Omega_1(\mathfrak{P})$. Daher ist $\lambda_1(S)\,\lambda_2(S)$ gleich $\lambda_1(S)$ oder gleich $\lambda_2(S)$ (für alle $S \in \mathfrak{S}$) also ist $\lambda_1(S) \equiv 1$ oder $\lambda_2(S) \equiv 1$. Somit hat $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{P}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})$ mindestens p Fixpunkte.

b) Die Behauptung folgt nun sofort aus Hilfssatz 1.4, wenn für $\mathfrak{S}$ ein p-Komplement von $N(\mathfrak{P})$ genommen wird.

§ 2. Modulare p-Gruppen

2.1. DEFINITION. *Die p-Gruppe $\mathfrak{P}$ heißt modular, wenn der Verband $V(\mathfrak{P})$ aller Untergruppen von $\mathfrak{P}$ ein modularer Verband ist, d.h. wenn aus $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in V(\mathfrak{P})$ und $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{C}$ stets folgt $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle \cap \mathfrak{C} = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} \rangle$.*

2.2. SATZ[2]). *Eine p-Gruppe ist genau dann modular, wenn je zwei Untergruppen als Ganzes vertauschbar sind. (Die Modularität überträgt sich also nicht nur auf Untergruppen, sondern auch auf Faktorgruppen.)*

BEWEIS. a) Seien alle Untergruppen von $\mathfrak{P}$ vertauschbar. Ist $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{C}$, so gilt dann $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle \cap \mathfrak{C} = (\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \cap \mathfrak{C} = \mathfrak{A}(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}) = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} \rangle$ und dies ist die modulare Identität.

b) Ist umgekehrt $V(\mathfrak{P})$ modular, so erfüllt es bekanntlich die Dedekind-Bedingung. Der Verband $V(\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle : \mathfrak{A})$ der Untergruppen $\mathfrak{U}$ mit $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle \geqq \mathfrak{U} \geqq \mathfrak{A}$ und der Verband $V(\mathfrak{B} : \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$ der Untergruppen $\mathfrak{V}$ mit $\mathfrak{B} \geqq \mathfrak{V} \geqq \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ sind dann isomorph, haben daher die gleiche Länge. Da es sich aber um eine

[2]). Siehe IWASAWA [6], S. 175.

p-Gruppe handelt, wo jede maximale Untergruppe den Index p hat, folgt jetzt $|\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}\rangle : \mathfrak{A}| = |\mathfrak{B} : \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}|$ und daraus $|\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}\rangle| = \frac{|\mathfrak{A}|\,|\mathfrak{B}|}{|\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}|} = |\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$. Also ist $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}\rangle = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind vertauschbar.

Für uns ist die folgende Charakterisierung nützlich:

2.3. SATZ. *Sei $p \neq 2$. Genau dann ist die p-Gruppe $\mathfrak{P}$ modular, wenn für alle Untergruppen $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{P}$ gilt $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{U}) \geqq \mathfrak{U}'$. (Für $p = 2$ ist bekanntlich immer $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{U}) \geqq \mathfrak{U}'$).*

BEWEIS. a) Sei $\mathfrak{P}$ modular, seien X und Y Elemente aus $\mathfrak{U} \leqq \mathfrak{P}$. Nach 2.2 gilt $\langle X\rangle\langle Y\rangle = \langle X, Y\rangle$. In einem Produkt $\mathfrak{V} = \langle X\rangle\langle Y\rangle$ von zwei zyklischen p-Gruppen gilt aber stets die Relation $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{V}) \geqq \mathfrak{V}'$: Denn nach dem Burnsideschen Basissatz ist $|\mathfrak{V}/\Phi(\mathfrak{V})| \leqq p^2$ (s. ZASSENHAUS [11], S. 105). Andererseits erhält man sofort $|\langle X^p\rangle\langle Y^p\rangle| = |\mathfrak{V}|/p^2$; also ist $\Phi(\mathfrak{V}) = \langle X^p\rangle\langle Y^p\rangle = \mathfrak{O}_1(\mathfrak{V}) \geqq \mathfrak{V}'$. Da X und Y beliebige Elemente von $\mathfrak{U}$ sind, ergibt sich jetzt $(X, Y) \in \mathfrak{V}' \leqq \mathfrak{O}_1(\mathfrak{V}) \leqq \mathfrak{O}_1(\mathfrak{U})$, also $\mathfrak{U}' \leqq \mathfrak{O}_1(\mathfrak{U})$.

b) Sei nun $\mathfrak{U}' \leqq \mathfrak{O}_1(\mathfrak{U})$ für alle Untergruppen $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{P}$. Seien X und Y aus $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{U} = \langle X, Y\rangle$. Nach unserer Annahme ist $\mathfrak{U}' \leqq \mathfrak{O}_1(\mathfrak{U})$, also $|\mathfrak{U}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{U})| = |\mathfrak{U}/\Phi(\mathfrak{U})| \leqq p^2$. Wegen $p > 2$ ist dann $\mathfrak{U}$ regulär mit höchstens 2 Invarianten, dann aber $\mathfrak{U} = \langle X\rangle\langle Y\rangle$ (s. HUPPERT [4], S. 247). Somit sind alle zyklischen Untergruppen von $\mathfrak{P}$ vertauschbar, dann aber auch alle Untergruppen.

2.4. HILFSSATZ. a) *Jede modulare p-Gruppe mit $p > 2$ ist regulär im Sinne von* P. HALL.

b) *Ist $\mathfrak{P}$ eine modulare p-Gruppe und $p > 2$, so ist die Abbildung von $X \in \Omega_i(\mathfrak{P})$ auf $X^{p^{i-1}}$ ein Homomorphismus in $Z(\Omega_i(\mathfrak{P}))$.*

BEWEIS. a) Es ist $\langle X, Y\rangle = \langle X\rangle\langle Y\rangle$ und jedes Produkt von zwei zyklischen p-Gruppen ist für $p > 2$ regulär (s. HUPPERT [4], S. 247).

b) Die Hallschen Relationen für reguläre p-Gruppen liefern uns nun

$$(\Omega_i(\mathfrak{P}), \mathfrak{O}_{i-1}(\Omega_i(\mathfrak{P}))) = \mathfrak{O}_{i-1}(\Omega_i(\mathfrak{P})') \leqq \mathfrak{O}_{i-1}(\mathfrak{O}_1(\Omega_i(\mathfrak{P}))) = \mathfrak{O}_i(\Omega_i(\mathfrak{P})) = \mathfrak{E},$$

also

$$\mathfrak{O}_{i-1}(\Omega_i(\mathfrak{P})) \leqq Z(\Omega_i(\mathfrak{P})).$$

Die Regularität ergibt ferner

$$(XY)^{p^{i-1}} = X^{p^{i-1}} Y^{p^{i-1}} \prod C_j^{p^{i-1}}$$

mit $C_j \in \Omega_i(\mathfrak{P})' \leqq \mathfrak{O}_1(\Omega_i(\mathfrak{P}))$, also $C_j^{p^{i-1}} \in \mathfrak{O}_i(\Omega_i(\mathfrak{P})) = \mathfrak{E}$. Also bleibt nur

$$(XY)^{p^{i-1}} = X^{p^{i-1}} Y^{p^{i-1}}$$

und die Abbildung von X auf $X^{p^{i-1}}$ ist ein Homomorphismus.

Wichtig für unsere späteren Untersuchungen ist, daß eine modulare p-Gruppe ein großes Zentrum besitzt; es gilt nämlich:

2.5. SATZ. *Ist $\mathfrak{P}$ eine modulare p-Gruppe mit $p > 2$, so gilt*

$$|Z(\mathfrak{P}) \cap \Omega_1(\mathfrak{P})| \geqq p^{\omega_1 - 1};$$

dabei ist ω_1 die Anzahl der Basiselemente von $\mathfrak{P}$, also $|\Omega_1(\mathfrak{P})| = p^{\omega_1}$.

Beweis. a) Seien $A_1, \ldots, A_s, A_{s-1}, \ldots$ eine Basis von $\mathfrak{P}$ mit Ordnung $A_i = p^{\mu_1} = p^{\mu}$ für $1 \leqq i \leqq s$, Ordnung $A_j \leq$ Ordnung $A_{s+1} = p^{\mu_2} < p^{\mu}$ für $j > s$ (s. P. Hall [1], S. 90, theorem 4.51). Sei $X \in \Omega_1(\mathfrak{P})$ und $1 \leqq i \leqq s$. Dann ist $\langle A_i, X\rangle = \langle A_i\rangle\langle X\rangle$, also ist $\langle A_i\rangle$ ein Normalteiler von $\langle A_i, X\rangle$. Wegen $X^p = E$ liefert uns dies

$$A_i^X = A_i^{1+\lambda_i(X)\,p^{\mu-1}}.$$

Wir zeigen nun, daß alle $\lambda_i(X)$ mit $1 \leqq i \leqq s$ (bei festem X) übereinstimmen:

$$(A_i A_j)^X = A_i^X A_j^X = A_i^{1+\lambda_i(X)\,p^{\mu-1}} A_j^{1+\lambda_j(X)\,p^{\mu-1}} = (A_i A_j)^{1+\varrho(X)\,p^{\mu-1}}$$

(denn auch $A_i A_j$ hat die Ordnung p^{μ} und wird von X in eine Potenz von sich transformiert).

$$\left.\begin{aligned} &= A_i A_j (A_i A_j)^{\varrho(X)\,p^{\mu-1}} \\ &= A_i A_j (A_i^{p^{\mu-1}} A_j^{p^{\mu-1}})^{\varrho(X)} \\ &= A_i A_j A_i^{\varrho(X)\,p^{\mu-1}} A_j^{\varrho(X)\,p^{\mu-1}} \\ &= A_i^{1+\varrho(X)\,p^{\mu-1}} A_j^{1+\varrho(X)\,p^{\mu-1}}. \end{aligned}\right\} \text{(nach 2.4)}$$

Da die A_i Basiselemente sind, ist der Vergleich der Exponenten erlaubt und liefert $\lambda_i(X) \equiv \varrho(X) \equiv \lambda_j(X) \bmod p$. Also erhalten wir $A_i^X = A_i^{1+\lambda(X)\,p^{\mu-1}}$ für alle $1 \leqq i \leqq s$ und alle $X \in \Omega_1(\mathfrak{P})$.

b) Wir betrachten nun $\Omega_{\mu_2}(\mathfrak{P})$ mit der Basis

$$A_1^{p^{\mu-\mu_2}}, \ldots, A_s^{p^{\mu-\mu_2}}, A_{s+1}, \ldots.$$

Wenden wir a) auf $\Omega_{\mu_2}(\mathfrak{P})$ an, so erhalten wir

$$A_{s+1}^X = A_{s+1}^{1+\tau(X)\,p^{\mu_2-1}} \quad \text{und} \quad (A_1^{p^{\mu-\mu_2}})^X = (A_1^{p^{\mu-\mu_2}})^{1+\tau(X)\,p^{\mu_2-1}}.$$

Andererseits ist $A_1^{p^{\mu-\mu_2}} \in \mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})$, wird also von $X \in \Omega_1(\mathfrak{P})$ zentralisiert (s. P. Hall [1], S. 88, theorem 4.461). Daher ist $\tau(X) \equiv 0\,(p)$, somit $A_{s+1}^X = A_{s+1}$. Dieses Verfahren läßt sich fortsetzen und ergibt schließlich $\Omega_{\mu-1}(\mathfrak{P}) \leqq C(\Omega_1(\mathfrak{P}))$. Also haben wir dann $A_i^X = A_i^{1+\lambda(X)\,p^{\mu-1}}$ für alle Basiselemente A_i von $\mathfrak{P}$.

c) Offenbar ist die Abbildung $X \to \lambda(X)$ ein Homomorphismus von $\Omega_1(\mathfrak{P})$ in die additive Gruppe des Körpers $GF(p)$. Der Kern dieses Homomorphismus ist $\Omega_1(\mathfrak{P}) \cap Z(\mathfrak{P})$. Also folgt $|\Omega_1(\mathfrak{P})/\Omega_1(\mathfrak{P}) \cap Z(\mathfrak{P})| \leqq p$, was zu zeigen war.

Die Struktur der modularen p-Gruppen (und überhaupt aller endlichen Gruppen mit modularem Untergruppenverband) wurde von Iwasawa bestimmt (Iwasawa [6], S. 187ff.). Da sich aber in dem Iwasawaschen Beweis eine Lücke befindet[3]), wollen wir hier die Iwasawaschen Resultate nicht verwenden. Satz 2.5 wird für die beabsichtigten Untersuchungen ausreichen. Wir geben noch eine einfache Folgerung aus Satz 2.5 an:

2.6. Satz. *Jede modulare p-Gruppe mit $p > 2$ ist metabelsch. Schärfer: Jede modulare p-Gruppe mit $p > 2$ ist isomorph zu einer Untergruppe eines direkten Produktes von metazyklischen Gruppen.*

Beweis. Durch Induktion nach $|\mathfrak{P}|$.

Ist $\omega_1(\mathfrak{P}) = 2$, so ist $\mathfrak{P}$ metazyklisch (Huppert [4], S. 247). Sei also $|\Omega_1(\mathfrak{P})| = p^{\omega_1(\mathfrak{P})} \geqq p^3$. Nach Satz 2.5 ist dann $|\Omega_1(\mathfrak{P}) \cap Z(\mathfrak{P})| \geqq p^2$. Also gibt

[3]) Auf S. 197, letzter Abschnitt.

es Untergruppen $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{M}$ von $Z(\mathfrak{P})$ mit $|\mathfrak{N}|=|\mathfrak{M}|=p$ und $\mathfrak{N}\cap\mathfrak{M}=\mathfrak{E}$. Unsere Induktionsannahme sagt nun, daß $\mathfrak{P}/\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{P}/\mathfrak{M}$ isomorph sind zu Untergruppen von direkten Produkten von metazyklischen p-Gruppen. Daher trifft dies auch für $\mathfrak{P}=\mathfrak{P}/\mathfrak{N}\cap\mathfrak{M}\leqq\mathfrak{P}/\mathfrak{N}\times\mathfrak{P}/\mathfrak{M}$ zu

§ 3. Auflösbare Gruppen mit modularen Sylow-Gruppen

Hat $\mathfrak{G}$ eine abelsche p-Sylow-Gruppe $\mathfrak{P}$, so gilt bekanntlich $\mathfrak{G}'\cap Z(\mathfrak{G})\cap\mathfrak{P}=\mathfrak{E}$ (s. TAUNT [7], dort mit der für den Beweis nicht wesentlichen Einschränkung, daß $\mathfrak{G}$ auflösbar ist; ein einfacher Beweis in HUPPERT [5]). Wir wollen diesen Satz verallgemeinern auf den Fall, daß $\mathfrak{P}$ eine modulare p-Gruppe mit $p>2$ ist. Der einfache Beweis (HUPPERT [5]) scheint dies nicht zu leisten. Aber der Tauntsche Beweis benötigt nur geringe Abänderungen.

3.1. DEFINITION. *$K_\infty(\mathfrak{G})$ sei der kleinste Normalteiler von $\mathfrak{G}$ mit nilpotenter Faktorgruppe. Also ist $K_\infty(\mathfrak{G})$ der Durchschnitt aller Glieder der absteigenden Zentralreihe von $\mathfrak{G}$; dies ist eine duale Bildung zum Hyperzentrum $Z_\infty(\mathfrak{G})$, man könnte also $K_\infty(\mathfrak{G})$ den Hyperkommutator von $\mathfrak{G}$ nennen.*

3.2. SATZ. *Hat $\mathfrak{G}$ eine modulare p-Sylow-Gruppe $\mathfrak{P}$ mit $p>2$, so gilt $\mathfrak{P}\cap Z(\mathfrak{G})\cap K_\infty(\mathfrak{G})=\mathfrak{E}$.*

BEWEIS. Sei $\mathfrak{G}$ ein Gegenbeispiel von kleinster Ordnung, also $\mathfrak{P}\cap Z(\mathfrak{G})\cap K_\infty(\mathfrak{G})\neq\mathfrak{E}$. Dann gibt es einen Normalteiler $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{G}$ mit $|\mathfrak{K}|=p$ und $\mathfrak{K}\leqq\mathfrak{P}\cap Z(\mathfrak{G})\cap K_\infty(\mathfrak{G})$.

a) Sei $\mathfrak{N}\lhd\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{N}\cap\mathfrak{K}=\mathfrak{E}$. Dann gilt unser Satz für $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$. Das ergibt $\mathfrak{E}<\mathfrak{N}\mathfrak{K}/\mathfrak{N}\leqq\mathfrak{P}\mathfrak{N}/\mathfrak{N}\cap Z(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})\cap K_\infty(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})=\mathfrak{E}$, also ein Widerspruch. Somit ist $\mathfrak{N}$ einziger minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$.

b) Sei $\mathfrak{M}$ ein maximaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Nach a) haben wir dann $\mathfrak{K}\leqq\mathfrak{M}\lhd\mathfrak{G}$. Sei $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{P}=\mathfrak{Q}$. Nun ist $\mathfrak{K}\leqq\mathfrak{Q}\cap Z(\mathfrak{M})$, also wegen $\mathfrak{Q}\cap Z(\mathfrak{M})\cap K_\infty(\mathfrak{M})=\mathfrak{E}$ sicher $\mathfrak{K}\nleqq K_\infty(\mathfrak{M})$. Da $K_\infty(\mathfrak{M})$ in $\mathfrak{G}$ normal ist und $\mathfrak{K}$ einziger minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist, erhalten wir $K_\infty(\mathfrak{M})=\mathfrak{E}$, d.h. $\mathfrak{M}$ ist nilpotent. Dann ist notwendig $\mathfrak{M}$ eine p-Gruppe. Hat $\mathfrak{G}$ mehr als einen maximalen Normalteiler, so ist $\mathfrak{G}=\mathfrak{P}$ und der Satz wird wegen $K_\infty(\mathfrak{G})=\mathfrak{E}$ trivial. Also ist $\mathfrak{M}$ einziger maximaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$.

c) Angenommen, es sei $N_\mathfrak{G}(\mathfrak{P})<\mathfrak{G}$. Dann haben wir $\mathfrak{K}\leqq\mathfrak{P}\cap Z\left(N_\mathfrak{G}(\mathfrak{P})\right)$ und $\mathfrak{P}\cap Z\left(N_\mathfrak{G}(\mathfrak{P})\right)\cap K_\infty\left(N_\mathfrak{G}(\mathfrak{P})\right)=\mathfrak{E}$, also $\mathfrak{K}\nleqq K_\infty\left(N_\mathfrak{G}(\mathfrak{P})\right)$. Somit ist p ein Teiler von $N_\mathfrak{G}(\mathfrak{P})/N_\mathfrak{G}(\mathfrak{P})'$, d.h. $N_\mathfrak{G}(\mathfrak{P})$ besitzt nichttriviale p-Faktorgruppen. Da $\mathfrak{P}$ regulär ist, hat dann auch $\mathfrak{G}$ selbst eine nichttriviale p-Faktorgruppe (WIELANDT [8], S. 189, Satz 5). Da $\mathfrak{M}$ einziger maximaler Normalteiler ist, liefert dies $|\mathfrak{G}/\mathfrak{M}|=p$, daher $\mathfrak{G}=\mathfrak{P}$ und wir sind fertig. Also ist $N_\mathfrak{G}(\mathfrak{P})=\mathfrak{G}$, somit $\mathfrak{M}=\mathfrak{P}\lhd\mathfrak{G}$.

d) Sei $\mathfrak{L}=Z(\mathfrak{P})\cap\Omega_1(\mathfrak{P})$. Dann ist $\mathfrak{K}\leqq\mathfrak{L}\lhd\mathfrak{G}$. Dabei wird $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{P}$ zentralisiert, erfährt also unter $\mathfrak{G}$ eine Automorphismengruppe von zu p teilerfremder Ordnung. Ist $|\mathfrak{L}|>p$, so erhalten wir nach dem Satz von MASCHKE $\mathfrak{L}=\mathfrak{K}\times\mathfrak{T}$ mit $\mathfrak{E}<\mathfrak{T}\lhd\mathfrak{G}$, entgegen der Feststellung in a), daß $\mathfrak{K}$ einziger minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist. Also haben wir $|\mathfrak{L}|=p$, woraus mit Satz 2.5 folgt, daß $|\Omega_1(\mathfrak{P})|\leqq p^2$ gilt. Mithin ist $\mathfrak{P}$ zyklisch oder metazyklisch.

e) Sei $\mathfrak{P}$ metazyklisch. Wegen $|\Omega_1(\mathfrak{P}) \cap Z(\mathfrak{P})| = p$ ist dann $\mathfrak{P}$ nichtabelsch. Nach Satz 1.5 hat daher $\mathfrak{G}$ eine nichttriviale p-Faktorgruppe, entgegen der Feststellung in c), daß $\mathfrak{P}$ einziger maximaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist. Also ist $\mathfrak{P}$ zyklisch. Dann bewirkt ein p-Komplement $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{G}$ (welches nach dem Satz von SCHUR-ZASSENHAUS existiert) wegen $\mathfrak{N} \leqq Z(\mathfrak{G})$ die triviale Automorphismengruppe auf $\mathfrak{N} = \Omega_1(\mathfrak{G})$. Dann zentralisiert $\mathfrak{Z}$ aber ganz $\mathfrak{P}$, so daß wir $\mathfrak{G} = \mathfrak{P} \times \mathfrak{Z}$ erhalten, woraus $\mathfrak{Z} = \mathfrak{E}$ folgt. Nun ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{P}$ und der Satz ist bewiesen.

Mit Hilfe von Satz 3.2 lassen sich große Teile der Tauntschen Theorie der A-Gruppen ohne Schwierigkeit auf Gruppen mit modularen p-Sylow-Gruppen ausdehnen. Wir erwähnen:

3.3. SATZ. *Sei $\mathfrak{G}$ auflösbar. Die Sylow-Gruppen von $\mathfrak{G}$ seien modular für $p > 2$, abelsch für $p = 2$. Ist $\mathfrak{D}$ ein Systemnormalisator von $\mathfrak{G}$* (s. P. HALL [2]), *so gilt $\mathfrak{G} = K_\infty(\mathfrak{G})\,\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D} \cap K_\infty(\mathfrak{G}) = \mathfrak{E}$.*

BEWEIS. $\mathfrak{G}/K_\infty(\mathfrak{G})$ enthält nur zentrale Hauptfaktoren von $\mathfrak{G}$, wird also von $\mathfrak{D}$ gedeckt, d.h. es ist $\mathfrak{G} = K_\infty(\mathfrak{G})\,\mathfrak{D}$. Aber $K_\infty(\mathfrak{G})$ enthält nach Satz 3.2 keinen zentralen Hauptfaktor von $\mathfrak{G}$, wird daher von $\mathfrak{D}$ gemieden, was $K_\infty(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{D} = \mathfrak{E}$ ergibt. (Für die Deck-Meide-Eigenschaften von $\mathfrak{D}$ s. P. HALL [2], theorem 6.1 und 7.1.)

3.4. SATZ. *Ist $\mathfrak{G}$ auflösbar und sind die p-Sylow-Gruppen von $\mathfrak{G}$ modular für $p > 2$, abelsch für $p = 2$, so läßt sich jede Darstellung von $\mathfrak{G}$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0 auf monomiale Gestalt bringen.*

BEWEIS. Zum Beweis genügt bekanntlich der Nachweis eines abelschen Normalteilers, der nicht im Zentrum liegt (und der Hinweis darauf, daß sich die Voraussetzung auf Untergruppen vererbt). Ist $K_\infty(\mathfrak{G}) = \mathfrak{E}$, so ist $\mathfrak{G}$ nilpotent und jeder Normalteiler, der zyklische Erweiterung des Zentrums ist, erfüllt unsere Bedingung. Ist aber $K_\infty(\mathfrak{G}) \neq \mathfrak{E}$, so wählen wir einen minimalen Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ in $K_\infty(\mathfrak{G})$. Da nun die Voraussetzungen von 3.2 für alle $p > 2$ erfüllt sind und für $p = 2$ sogar $\mathfrak{P} \cap Z(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{G}' = \mathfrak{E}$ gilt, haben wir $Z(\mathfrak{G}) \cap K_\infty(\mathfrak{G}) = \mathfrak{E}$. Also liegt $\mathfrak{N}$ nicht in $Z(\mathfrak{G})$.

Die Einschränkung, daß die 2-Sylow-Gruppe abelsch und nicht nur modular ist, ist in den bisherigen Sätzen notwendig; diese zeigt die Erweiterung der Quaternionengruppe der Ordnung 8 mit einem Automorphismus der Ordnung 3.

Für die Untersuchung des folgenden Paragraphen ist eine Aussage über die p-Länge einer p-auflösbaren Gruppe mit modularer p-Sylow-Gruppe wichtig. Wir beweisen etwas mehr, als für die Anwendungen benötigt wird, nämlich:

3.5. SATZ. *Sei $\mathfrak{G}$ p-auflösbar, $\mathfrak{P}$ eine p-Sylow-Gruppe von $\mathfrak{G}$.*

a) *Läßt sich keine Untergruppe von $\mathfrak{P}$ homomorph auf die p-Sylow-Gruppe der symmetrischen Gruppe vom Grade p^2 abbilden und ist p keine Fermatsche Primzahl, so hat $\mathfrak{G}$ die p-Länge 1*[4]).

[4]) Eine allgemeinere Vermutung wird in [3] auf S. 8 erwähnt.

b) *Ist* $\mathfrak{P}$ *regulär, so hat* $\mathfrak{G}$ *höchstens die* p*-Länge* 2.

c) *Ist* $\mathfrak{P}$ *modular und* $p>2$, *so hat* $\mathfrak{G}$ *die* p*-Länge* 1.

VORBEMERKUNGEN. (1) Jede reguläre p-Gruppe erfüllt die Voraussetzung von a); denn einerseits vererbt sich Regularität auf Untergruppen und Faktorgruppen andererseits ist die p-Sylow-Gruppe der symmetrischen Gruppe vom Grade p^2 irregulär. Aus a) folgt also: Ist $\mathfrak{P}$ regulär und p keine Fermatsche Primzahl, so hat $\mathfrak{G}$ die p-Länge 1. Somit ist b) nur für Fermat-Zahlen p von Interesse.

(2) Ist $\mathfrak{P}$ modular und $p>2$, so ist $\mathfrak{P}$ regulär. Falls also p keine Fermat-Zahl ist, folgt c) schon aus a).

BEWEIS. Sei $\mathfrak{G}$ ein Gegenbeispiel von kleinster Ordnung. Unsere Voraussetzungen übertragen sich auf Untergruppen und Faktorgruppen von $\mathfrak{G}$. Also haben alle eigentlichen Untergruppen und alle eigentlichen Faktorgruppen von $\mathfrak{G}$ die p-Länge 1 (bzw. $\leqq 2$). Ferner ist $\mathfrak{G}$ p-reduziert, d.h. es hat keine nichttrivialen Normalteiler oder Faktorgruppen von zu p teilerfremder Ordnung. Wir beweisen nun nacheinander:

(1) $$\Phi(\mathfrak{G}) = \mathfrak{E}:$$

Angenommen, es sei $\Phi(\mathfrak{G})>\mathfrak{E}$. Sei $\mathfrak{N}$ ein in $\Phi(\mathfrak{G})$ liegender minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{G}$ p-reduziert ist, ist $\mathfrak{N}$ eine p-Gruppe. Da $\mathfrak{G}$ ein minimales Gegenbeispiel ist, haben wir $l_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})=1$ im Falle a) oder c) und $l_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})\leqq 2$ im Falle b). Sei $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ der maximale Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ von zu p teilerfremder Ordnung. Nach dem Satz von ZASSENHAUS-SCHUR gibt es eine Untergruppe $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{N}\cap\mathfrak{S}=\mathfrak{E}$; wegen der Auflösbarkeit von $\mathfrak{N}$ sind alle diese Gruppen $\mathfrak{S}$ konjugiert in $\mathfrak{M}$ (s. ZASSENHAUS [*11*], S. 125). Dies ergibt $\mathfrak{G}=\mathfrak{M}N(\mathfrak{S})=\mathfrak{N}N(\mathfrak{S})$ und dann wegen $\mathfrak{N}\leqq\Phi(\mathfrak{G})$ sogar $\mathfrak{G}=N(\mathfrak{S})$. Also ist $\mathfrak{S}\lhd\mathfrak{G}$, wegen der p-Reduziertheit von $\mathfrak{G}$ dann $\mathfrak{S}=\mathfrak{E}$. Daraus folgt $l_p(\mathfrak{G})=l_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})=1$ bzw. $\leqq 2$,entgegen der Wahl von $\mathfrak{G}$ als Gegenbeispiel. Also ist $\Phi(\mathfrak{G})=\mathfrak{E}$.

(2) *Der maximale* p*-nilpotente Normalteiler* $\mathfrak{L}$ *von* $\mathfrak{G}$ *ist eine elementar abelsche* p*-Gruppe:*

Da $\mathfrak{G}$ keine nichttrivialen Normalteiler von zu p teilerfremder Ordnung besitzt, ist $\mathfrak{L}$ sicher eine p-Gruppe. Ferner ist $\Phi(\mathfrak{L})\leqq\Phi(\mathfrak{G})$, da $\mathfrak{L}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist. Mit (1) ergibt dies $\Phi(\mathfrak{L})=\mathfrak{E}$, also die Behauptung.

(3) $\mathfrak{L}$ *ist einziger minimaler Normalteiler von* $\mathfrak{G}$:

Angenommen es sei $\mathfrak{E}<\mathfrak{K}<\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{K}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Dann ist $l_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{K})=1$ bzw. $\leqq 2$. Sei $\mathfrak{M}/\mathfrak{K}$ der maximale Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ von zu p teilerfremder Ordnung. Wie in (1) gilt $\mathfrak{M}=\mathfrak{K}\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{K}\cap\mathfrak{S}=\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{G}=\mathfrak{K}N(\mathfrak{S})$. Ist $\mathfrak{S}=\mathfrak{E}$, so folgt $l_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{K})=l_p(\mathfrak{G})=1$ bzw. $\leqq 2$, entgegen der Wahl von $\mathfrak{G}$ als Gegenbeispiel. Also gilt sicher $\mathfrak{S}\neq\mathfrak{E}$, daher $N(\mathfrak{S})<\mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{K}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist, folgt $\mathfrak{K}\cap N(\mathfrak{S})=\mathfrak{E}$. Nun haben wir $\mathfrak{L}=\mathfrak{K}\times\mathfrak{L}$ mit $\mathfrak{L}=N(\mathfrak{S})\cap\mathfrak{L}$, also $\mathfrak{L}\lhd N(\mathfrak{S})$ und dann $\mathfrak{E}<\mathfrak{L}\lhd\mathfrak{G}$. Daraus folgt $l_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{L})=1$ bzw. $\leqq 2$. Dies liefert nun

$$l_p(\mathfrak{G}) = l_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{K}\cap\mathfrak{L}) = \mathrm{Max}\{l_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{K}),\ l_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{L})\} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \leqq 2,$$

denn $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}\cap\mathfrak{L}$ ist isomorph zu einer Untergruppe von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}\times\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$. Dies widerspricht der Wahl von $\mathfrak{G}$, also ist $\mathfrak{Q}$ doch minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Die letzte Schlußweise zeigt auch gleichzeitig, daß $\mathfrak{Q}$ einziger minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist.

(4) *Im Falle* a) *oder* c) *gilt* $l_p(\mathfrak{G})=1$:

Sei $\mathfrak{N}$ ein maximaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{Q}\leq\mathfrak{N}$. Dann ist $l_p(\mathfrak{N})=1$. Da $\mathfrak{G}$ p-reduziert ist, gilt $|\mathfrak{G},\mathfrak{N}|=p$ und $\mathfrak{N}$ hat keine nichttrivialen Normalteiler von zu p teilerfremder Ordnung. Letzteres liefert $\mathfrak{N}=\mathfrak{Q}\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{Q}=\mathfrak{N}\cap\mathfrak{P}\lhd\mathfrak{N}$ und einem $\mathfrak{S}$ von zu p teilerfremder Ordnung. Wie in (1) erhalten wir wieder $\mathfrak{G}=\mathfrak{Q}N(\mathfrak{S})$ und wegen der p-Reduziertheit ist sicher $N(\mathfrak{S})<\mathfrak{G}$, also $\mathfrak{Q}\not\leq N(\mathfrak{S})$. Da $\mathfrak{Q}$ nach (3) minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist, folgt $\mathfrak{Q}\cap N(\mathfrak{S})=\mathfrak{E}$. Also gibt es ein Element $P\in N(\mathfrak{S})$ mit $P^p=E$ derart, daß $\mathfrak{Q}\langle P\rangle$ eine p-Sylow-Gruppe $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}$ ist. Im Falle c) ist nun $\Omega_1(\mathfrak{P})=\mathfrak{P}$, also ist $\mathfrak{P}$ abelsch. Dann folgt $l_p(\mathfrak{G})=1$ aus den Sätzen von Hall-Higman ([3], S. 7).

Im Falle a) betrachten wir den von P auf $\mathfrak{Q}$ bewirkten Automorphismus. Angenommen, es trete ein unzerlegbarer Teil $Q_1,\ldots,Q_d$ der Dimension $d\geqq p$ auf. Wir können die Elemente Q_i von $\mathfrak{Q}$ so wählen, daß gilt

$$Q_1^P=Q_1,\qquad Q_i^P=Q_iQ_{i-1}\quad\text{für}\quad 2\leqq i\leqq d$$

(Jordansche Normalform für P!). Nun ist $\langle Q_1,\ldots,Q_p,P\rangle$ eine Untergruppe von $\mathfrak{P}$, welche zur p-Sylow-Gruppe der symmetrischen Gruppe vom Grade p^2 isomorph ist. Dies ist aber im Falle a) ausgeschlossen.

Somit haben alle unzerlegbaren Teile von P höchstens die Dimension $p-1$, d.h. das Minimalpolynom von P ist ein Teiler von

$$(x-1)^{p-1}=\frac{(x-1)^p}{(x-1)}=\frac{x^p-1}{x-1}=1+x+\cdots+x^{p-1}.$$

Mithin ist $E+P+\cdots+P^{p-1}$ auf $\mathfrak{Q}$ der Nulloperator, und dies gilt ebenso für jede Potenz P^i von P. Nun haben wir für alle $Q\in\mathfrak{Q}$

$$(Q\,P^{-i})^p=Q^{E+P^i+\cdots+P^{i(p-1)}}=E.$$

Also hat $\mathfrak{P}$ den Exponenten p. Da p keine Fermatsche Primzahl ist, folgt nach Hall-Higman $l_p(\mathfrak{G})=1$ ([3], S. 2);

(5) *Im Falle* b) *gilt* $l_p(\mathfrak{G})\leqq 2$:

Ist $\mathfrak{M}/\mathfrak{Q}$ der maximale Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{Q}$ von zu p teilerfremder Ordnung, so folgt wie früher $\mathfrak{M}=\mathfrak{Q}\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{G}=\mathfrak{Q}N(\mathfrak{S})$ mit $\mathfrak{Q}\cap N(\mathfrak{S})=\mathfrak{E}$. Also haben wir $\mathfrak{P}=\mathfrak{Q}\mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{U}=\mathfrak{P}\cap N(\mathfrak{S})$. Nach P. Hall sind in einer regulären p-Gruppe p-te Potenzen und Elemente der Ordnung p stets vertauschbar ([1], S. 88). Daher liegt $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})=\{P^p\,|\,P\in\mathfrak{P}\}$ im Zentralisator $C(\mathfrak{Q})$ von $\mathfrak{Q}$. Aus $\mathfrak{G}=\mathfrak{Q}N(\mathfrak{S})$ mit $\mathfrak{Q}\cap N(\mathfrak{S})=\mathfrak{E}$ folgt $C(\mathfrak{Q})=\mathfrak{Q}\times\mathfrak{L}$ mit $\mathfrak{L}=C(\mathfrak{Q})\cap N(\mathfrak{S})$. Dabei ist $\mathfrak{L}$ invariant unter $\mathfrak{Q}$ und $N(\mathfrak{S})$, also auch unter $\mathfrak{G}$. Nun liefert (3) die Aussage $\mathfrak{L}=\mathfrak{E}$. Daraus folgt $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{P})\leqq\mathfrak{Q}$, insbesondere $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{U})\leqq\mathfrak{U}\cap\mathfrak{Q}=\mathfrak{E}$. Mithin wird $\mathfrak{P}$ erzeugt von den beiden Untergruppen $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{U}$ vom Exponenten p. Wegen der Regularität hat dann $\mathfrak{P}$ selbst den Exponenten p und nach Hall-Higman folgt $l_p(\mathfrak{G})\leqq 2$ ([3], S. 2). Diese Schranke ist übrigens scharf, sie wird schon bei p-Gruppen vom Exponenten p angenommen.

§ 4. Normalstruktur von Gruppen mit einer modularen p-Sylow-Gruppe

$\mathfrak{G}$ habe modulare p-Sylow-Gruppe $\mathfrak{P}$ und es sei $p>2$. Wir wollen die Ergebnisse, welche in [5] für den Fall einer abelschen p-Sylow-Gruppe gewonnen wurden, auf diesen Fall ausdehnen. Die Grundlage dafür ist:

4.1. HILFSSATZ. *$\mathfrak{G}$ habe eine modulare p-Sylow-Gruppe $\mathfrak{P}$. Es sei $p>2$ und $\Omega_1(\mathfrak{P}) \trianglelefteq \mathfrak{G}$. Dann ist $\mathfrak{G}$ p-auflösbar.*

BEWEIS. Sei $\mathfrak{G}$ ein Gegenbeispiel von kleinster Ordnung. Die Voraussetzung besagt $\Omega_1(\mathfrak{P}) = \Omega_1(\mathfrak{P})^G = \Omega_1(\mathfrak{P}^G)$ für alle $G \in \mathfrak{G}$, d.h. die Elemente der Ordnung p von $\mathfrak{G}$ bilden eine Untergruppe. Dies überträgt sich offenbar auf alle Untergruppen von $\mathfrak{G}$, also ist jede eigentliche Untergruppe von $\mathfrak{G}$ p-auflösbar. Ferner ist $\mathfrak{G}$ p-reduziert. Wir zeigen nacheinander:

(1) $\mathfrak{G}/\Omega_1(\mathfrak{P})$ *ist eine einfache nichtabelsche Gruppe von durch p teilbarer Ordnung:*

Sei $\Omega_1(\mathfrak{P}) \leqq \mathfrak{N} \lhd \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{N}$ ein maximaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Dann ist $\mathfrak{N}$ p-auflösbar, also hat $\mathfrak{N}$ nach Satz 3.5 c) die p-Länge 1. Da $\mathfrak{G}$ p-reduziert ist, hat $\mathfrak{N}$ keinen nichttrivialen Normalteiler von zu p teilerfremder Ordnung. Also ist $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{Q} \lhd \mathfrak{G}$. Sicher ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ einfach und nicht p-auflösbar, also ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ nichtabelsch von durch p teilbarer Ordnung.

Da $\Omega_1(\mathfrak{P}) \leqq \mathfrak{Q}$ gilt, hat $\mathfrak{Q}$ ebenso viele Invarianten wie $\mathfrak{P}$. Daher ist $|\mathfrak{Q}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{Q})| = p^{\omega_1}$, also $\mathfrak{Q}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{Q}) = \Omega_1(\mathfrak{P}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{Q})) \lhd \mathfrak{G}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{Q})$. In $\mathfrak{G}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{Q})$ sind also alle Voraussetzungen erfüllt, aber $\mathfrak{G}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{Q})$ ist wegen $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{Q}) \leqq \mathfrak{N}$ nicht p-auflösbar. Somit erhalten wir $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{Q}) = \mathfrak{E}$, d.h. $\mathfrak{Q} = \Omega_1(\mathfrak{P})$.

Angenommen $\mathfrak{N}$ ist nicht Untergruppe der Frattini-Gruppe $\Phi(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$. Dann gibt es eine eigentliche Untergruppe $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}\mathfrak{V}$. Nun sind $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{V}$ p-auflösbar, somit auch $\mathfrak{G}$, entgegen der Wahl von $\mathfrak{G}$. Also bleibt $\mathfrak{N} \leqq \Phi(\mathfrak{G})$ und $\mathfrak{N}$ ist nilpotent. Da $\mathfrak{G}$ p-reduziert ist, folgt nun $\mathfrak{N} = \mathfrak{Q} = \Omega_1(\mathfrak{P})$.

(2) $\Omega_1(\mathfrak{P})$ *ist eigener Zentralisator in* $\mathfrak{G}$:

Aus $\Omega_1(\mathfrak{P}) \leqq C(\Omega_1(\mathfrak{P})) \trianglelefteq \mathfrak{G}$ folgt nach (1) entweder $\Omega_1(\mathfrak{P}) = C(\Omega_1(\mathfrak{P}))$ oder $\mathfrak{G} = C(\Omega_1(\mathfrak{P}))$. Im zweiten Falle liefert Hilfssatz 1.7 von [5] einen Normalteiler $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{G}$ mit $|\mathfrak{G}/\mathfrak{K}| = p^{\omega_1}$. Dies widerspricht jedoch (1).

(3) *Ist* $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{P}^X$, *so gilt* $\mathfrak{G} = \langle \mathfrak{P}, \mathfrak{P}^X \rangle$:

Sei $\Omega_1(\mathfrak{P}) \leqq \mathfrak{U} < \mathfrak{G}$, also $\mathfrak{U}$ p-auflösbar. Nach Satz 3.5 c) hat $\mathfrak{U}$ die p-Länge 1. Sei $\mathfrak{K}$ der maximale Normalteiler von $\mathfrak{U}$ von zu p teilerfremder Ordnung. Dann ist $\mathfrak{K} \leqq C(\Omega_1(\mathfrak{P})) = \Omega_1(\mathfrak{P})$ (nach (2)), also $\mathfrak{K} = \mathfrak{E}$. Somit hat $\mathfrak{U}$ wegen $l_p(\mathfrak{U}) = 1$ invariante p-Sylow-Gruppe. Ist also $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{P}^X$, so ist $\langle \mathfrak{P}, \mathfrak{P}^X \rangle$ sicher keine eigentliche Untergruppe von $\mathfrak{G}$.

(4) *Ist* $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{P}^X$, *so gilt* $Z(\mathfrak{P}) \cap Z(\mathfrak{P}^X) = \mathfrak{E}$:

Sei $\mathfrak{D} = Z(\mathfrak{P}) \cap Z(\mathfrak{P}^X)$. Dann haben wir $C(\mathfrak{D}) \geqq \langle \mathfrak{P}, \mathfrak{P}^X \rangle = \mathfrak{G}$ (nach (3)), also $\mathfrak{D} \leqq Z(\mathfrak{G})$. Nun liefert Hilfssatz 1.4 einen Normalteiler $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{G}$ mit $|\mathfrak{G}/\mathfrak{K}| = |\mathfrak{D}|$; denn $\mathfrak{D}$ liegt sicher in $\Omega_1(\mathfrak{P})$. Nach (1) folgt daher $\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$.

(5) *Es gilt* $\omega_1(\mathfrak{P}) \leqq 2$:

Sei $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{P}^X$, ferner $\mathfrak{Z}_1 = \Omega_1(\mathfrak{P}) \cap Z(\mathfrak{P})$ und $\mathfrak{Z}_2 = \Omega_1(\mathfrak{P}^X) \cap Z(\mathfrak{P}^X)$. Nach Satz 2.5 gilt $|\mathfrak{Z}_i| \geqq p^{\omega_1 - 1}$. Andererseits ist nach (4) $\mathfrak{Z}_1 \cap \mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{E}$, also $p^{2(\omega_1 - 1)} \leqq |\mathfrak{Z}_1 \times \mathfrak{Z}_2| \leqq |\Omega_1(\mathfrak{P})| = p^{\omega_1}$, was die Behauptung ergibt.

(6) $\mathfrak{G}$ *ist* p*-auflösbar:*

Ist $\mathfrak{P}$ abelsch, so folgt aus (2) $\mathfrak{P} \leqq C(\Omega_1(\mathfrak{P})) = \Omega_1(\mathfrak{P})$ und $\mathfrak{G}$ ist p-auflösbar. Andernfalls ist $\mathfrak{P}$ nach (5) metazyklisch und nichtabelsch. Dann liefert Satz 1.5 eine nichttriviale p-Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$, entgegen der Feststellung von (1).

4.2. Satz. $\mathfrak{G}$ *habe modulare* p*-Sylow-Gruppe* $\mathfrak{P}$ *und es sei* $p > 2$. *Sei* $\mathfrak{T}$ *der kleinste Normalteiler von* $\mathfrak{G}$ *mit* p*-auflösbarer Faktorgruppe. Dann enthält* $\mathfrak{T}$ *keinen Kompositionsfaktor der Ordnung* p.

Beweis. Sei wieder $\mathfrak{G}$ ein kleinstes Gegenbeispiel. Sei $\mathfrak{N}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Für $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ist der Satz richtig, aber für $\mathfrak{G}$ nicht. Daher ist $\mathfrak{N}$ eine p-Gruppe und es gibt einen Normalteiler $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{G}$, so daß $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$ p-auflösbar ist und $\mathfrak{L}/\mathfrak{N}$ keinen Kompositionsfaktor der Ordnung p enthält. Ist $\mathfrak{L} < \mathfrak{G}$, so gilt der Satz für $\mathfrak{L}$, dann aber auch für $\mathfrak{G}$. Also ist $\mathfrak{L} = \mathfrak{G}$. Falls $\mathfrak{N} = \Omega_1(\mathfrak{P})$, so ist $\mathfrak{G}$ nach Hilfssatz 4.1 p-auflösbar, also $\mathfrak{G}$ kein Gegenbeispiel.

Sei $\mathfrak{N} < \mathfrak{M} \lhd \mathfrak{G}$ mit $p \mid |\mathfrak{M}/\mathfrak{N}|$ und $\mathfrak{M}$ sei minimal mit diesen Eigenschaften. Ist $\mathfrak{M} < \mathfrak{G}$, so gilt der Satz in $\mathfrak{M}$. Sei $\mathfrak{R}$ der kleinste Normalteiler von $\mathfrak{M}$ mit p-auflösbarer Faktorgruppe $\mathfrak{M}/\mathfrak{R}$. Da $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ keinen Kompositionsfaktor der Ordnung p enthält, ist sicher $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{E}$. Andererseits ist $\mathfrak{R}$ eine charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{M}$, ist also normal in $\mathfrak{G}$. Nun gilt der Satz für $\mathfrak{G}/\mathfrak{R}$, dann aber auch für $\mathfrak{G}$ selbst. Somit ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{G}$, d.h. $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ist p-einfach.

Wegen $\mathfrak{N} < \Omega_1(\mathfrak{P})$ haben wir $\mathfrak{N} < \Omega_1(\mathfrak{P}) \leqq C(\mathfrak{N}) \trianglelefteq \mathfrak{G}$. Daraus folgt $C(\mathfrak{N}) = \mathfrak{G}$, also $\mathfrak{N} \leqq Z(\mathfrak{G})$. Nun liefert Hilfssatz 1.4 ein $\mathfrak{K} \lhd \mathfrak{G}$ mit $|\mathfrak{G}/\mathfrak{K}| = |\mathfrak{N}| = p^n > 1$. Für $\mathfrak{K}$ gilt nun der Satz, dann aber auch für $\mathfrak{G}$.

Wir übertragen nun auch die Sätze 3.4 und 3.6 aus Huppert [5] auf Gruppen mit einer modularen p-Sylow-Gruppe ($p > 2$):

4.3. Satz. $\mathfrak{G}$ *habe eine modulare* p*-Sylow-Gruppe* $\mathfrak{P}$. *Es sei* $p > 2$ *und* $\mathfrak{T}$ *sei der kleinste Normalteiler von* $\mathfrak{G}$ *mit* p*-auflösbarer Faktorgruppe. Dann zerfällt* $\mathfrak{P}$ *über* $\mathfrak{T} \cap \mathfrak{P}$.

Beweis. Wir können offenbar $\mathfrak{G} = \mathfrak{P}\mathfrak{T}$ annehmen. Sei $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{T}$. Sei ferner $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}\mathfrak{S}$ mit $p \nmid |\mathfrak{S}|$. Sicher ist $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{P}) \leqq N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{Q})$.

(1) *Es gilt* $N_{\mathfrak{T}}(\mathfrak{Q}) = \mathfrak{K}\mathfrak{Q}\mathfrak{S}$ *mit* $\mathfrak{K} \leqq C(\mathfrak{Q})$ *und* $p \nmid |\mathfrak{K}|$:

$N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{Q})$ ist p-auflösbar, hat also nach Satz 3.5 c) die p-Länge 1. Sei $\mathfrak{E} \leqq \mathfrak{K} \leqq \mathfrak{K}\mathfrak{P} \leqq N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{Q})$ eine p-Reihe von $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{Q})$, also $p \nmid |\mathfrak{K}|$. Wegen $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{Q} = \mathfrak{E}$ gilt sicher $\mathfrak{K} \leqq C(\mathfrak{Q})$. Für alle $S \in N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{Q})$ haben wir $\mathfrak{P}^S \leqq \mathfrak{K}\mathfrak{P}$, also nach dem Satz von Sylow $\mathfrak{P}^S = \mathfrak{P}^K$ für ein geeignetes $K \in \mathfrak{K}$. Dies ergibt $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{Q}) = \mathfrak{K} N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{K}\mathfrak{P}\mathfrak{S}$. Wegen $p \nmid |\mathfrak{K}|$ und $p \nmid |\mathfrak{S}|$ haben wir $\mathfrak{K}\mathfrak{S} \leqq \mathfrak{T}$. Damit ergibt sich $N_{\mathfrak{T}}(\mathfrak{Q}) = \mathfrak{K}\mathfrak{S}(\mathfrak{P} \cap \mathfrak{T}) = \mathfrak{K}\mathfrak{S}\mathfrak{Q} \leqq C_{\mathfrak{T}}(\mathfrak{Q})\mathfrak{S}\mathfrak{Q}$.

(2) *Wir betrachten die Menge* $\mathfrak{M}$ *der Untergruppen* $\mathfrak{X}$ *von* $\mathfrak{P}$ *mit* $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}\mathfrak{X}$ *und* $\mathfrak{X}^{\mathfrak{S}} = \mathfrak{X}$. *Wegen* $\mathfrak{P} \in \mathfrak{M}$ *ist* $\mathfrak{M}$ *sicher nicht leer. Sei* $\mathfrak{J}$ *ein minimales Element aus* $\mathfrak{M}$. *Dann ist* $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{Q} \leqq \mathfrak{O}_1(\mathfrak{J})$:

$\tilde{\mathfrak{Q}}=(\mathfrak{J}\cap\mathfrak{Q})\ \mathfrak{O}_1(\mathfrak{J})/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{J})$ ist ein Normalteiler von $\tilde{\mathfrak{J}}=\mathfrak{J}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{J})$. Wir können $\tilde{\mathfrak{J}}$ als $\mathfrak{S}$-Modul betrachten. Dann ist $\tilde{\mathfrak{Q}}$ ein $\mathfrak{S}$-Teilmodul, hat also nach dem Satz von MASCHKE ein Komplement $\tilde{\mathfrak{L}}=\mathfrak{L}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{J})$ mit $\mathfrak{L}^{\mathfrak{S}}=\mathfrak{L}$. Ist $\tilde{\mathfrak{Q}}>\tilde{\mathfrak{E}}$, so ist $\mathfrak{L}<\mathfrak{J}$. Nun ist $\mathfrak{P}=\mathfrak{Q}\mathfrak{J}=\mathfrak{Q}\mathfrak{L}$, entgegen der Wahl von $\mathfrak{J}$. Also haben wir $\tilde{\mathfrak{Q}}=\tilde{\mathfrak{E}}$, d.h. $\mathfrak{J}\cap\mathfrak{Q}\leqq\mathfrak{O}_1(\mathfrak{J})$.

(3) $\mathfrak{J}\cap\mathfrak{Q}=\mathfrak{E}$:

Wegen $\mathfrak{J}^{\mathfrak{S}}=\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{S}\leqq\mathfrak{T}$ folgt $(\mathfrak{J},\mathfrak{S})\leqq\mathfrak{J}\cap\mathfrak{T}=\mathfrak{J}\cap\mathfrak{P}\cap\mathfrak{T}=\mathfrak{J}\cap\mathfrak{Q}\leqq\mathfrak{O}_1(\mathfrak{J})$. Also bewirkt $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{J}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{J})$ den identischen Automorphismus. In der modularen p-Gruppe $\mathfrak{J}$ gilt nach Satz 2.3 $\Phi(\mathfrak{J})=\mathfrak{O}_1(\mathfrak{J})$ $\mathfrak{J}'=\mathfrak{O}_1(\mathfrak{J})$. Somit bewirkt $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{J}/\Phi(\mathfrak{J})$ den identischen Automorphismus. Da $\mathfrak{S}$ eine zu p teilerfremde Ordnung hat, folgt bekanntlich $(\mathfrak{S},\mathfrak{J})=\mathfrak{E}$. Nach (1) ist $\mathfrak{K}\,\mathfrak{S}$ ein p-Komplement von $N_{\mathfrak{T}}(\mathfrak{Q})$. Somit folgt $(\mathfrak{J}\cap\mathfrak{Q},\mathfrak{K}\,\mathfrak{S})=\mathfrak{E}$. Also besteht $\mathfrak{J}\cap\mathfrak{Q}$ aus Fixpunkten von $\mathfrak{Q}$ unter $\mathfrak{K}\,\mathfrak{S}$. Ist $|\Omega_1(\mathfrak{Q})\cap\mathfrak{J}|=p^\alpha>1$, so liefert nun Hilfssatz 1.4 einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{T}$ mit $|\mathfrak{T}/\mathfrak{N}|=p^\alpha$, entgegen der Definition von $\mathfrak{T}$. Also ist $\mathfrak{J}\cap\Omega_1(\mathfrak{Q})=\mathfrak{E}$ und dann auch $\mathfrak{J}\cap\mathfrak{Q}=\mathfrak{E}$.

Die Struktur von $\mathfrak{T}$ wird teilweise geklärt durch

4.4. SATZ. *$\mathfrak{G}$ habe eine modulare p-Sylow-Gruppe. Es sei $p>2$, ferner habe $\mathfrak{G}$ keinen Kompositionsfaktor der Ordnung p. Zu jeder Kompositionsreihe $\mathfrak{E}=\mathfrak{N}_0\lhd\mathfrak{N}_1\lhd\cdots\lhd\mathfrak{N}_r=\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{G}$ gibt es dann eine Zerlegung $\mathfrak{P}=\mathfrak{P}_1\times\cdots\times\mathfrak{P}_s$ mit den folgenden Eigenschaften:*

a) $\mathfrak{P}_1\times\cdots\times\mathfrak{P}_i=\mathfrak{P}\cap\mathfrak{N}_{j(i)}$ *für $1\leqq i\leqq s$ und geeignetes $j(i)$.*

b) *Ist $\mathfrak{N}\lhd\lhd\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{N}\cap\mathfrak{P}$ Produkt einiger der $\mathfrak{P}_i$.*

Der Beweis von Satz 3.6 aus HUPPERT [5] läßt sich wörtlich übertragen; dort wurde nämlich nicht benutzt, daß $\mathfrak{P}$ abelsch ist. Die benutzte Eigenschaft der Hauptfaktoren, nämlich p-einfach zu sein, folgt nach HUPPERT [5] Hilfssatz 2.2 schon aus der Regularität von $\mathfrak{P}$.

Auch 3.5 aus HUPPERT [5] läßt sich nun übertragen. In dem speziellen Falle, daß $\mathfrak{P}$ eine nichtabelsche metazyklische p-Gruppe ist, läßt sich noch etwas mehr sagen:

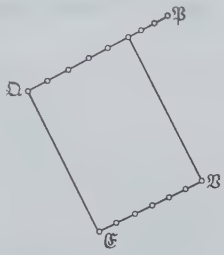
4.5. SATZ. *$\mathfrak{G}$ habe eine nichtabelsche metazyklische p-Sylow-Gruppe und es sei $p>2$. Dann gilt entweder $s_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P}=s\mathfrak{P}$ oder es gibt einen zyklischen Normalteiler $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{P}$ mit zyklischer Vertretergruppe und es besteht $s_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P}$ aus allen Obergruppen von $\mathfrak{Q}$ in $\mathfrak{P}$, ferner allen Untergruppen einer zyklischen Gruppe $\mathfrak{V}$ mit $\mathfrak{V}\leqq Z(\mathfrak{P})$ und $\mathfrak{V}\cap\mathfrak{Q}=\mathfrak{E}$. In diesem Falle besteht $s_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P}$ nur aus zwei Ketten.*

BEWEIS. Ist $\mathfrak{G}$ p-auflösbar, so gilt $l_p(\mathfrak{G})=1$ und wir erhalten nach WIELANDT [9] $s\mathfrak{P}=s_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P}$. Sei also $\mathfrak{G}$ nicht p-auflösbar und $\mathfrak{T}$ der kleinste Normalteiler von $\mathfrak{G}$ mit p-auflösbarer Faktorgruppe. Nach Satz 4.3 zerfällt $\mathfrak{P}$ über $\mathfrak{Q}=\mathfrak{P}\cap\mathfrak{T}$. Nach Satz 1.5 ist sicher $\mathfrak{Q}<\mathfrak{P}$, also haben wir $\mathfrak{P}=\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{R}>\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{Q}\cap\mathfrak{R}=\mathfrak{E}$. Insbesondere folgt $\Omega_1(\mathfrak{Q})\cap\Omega_1(\mathfrak{R})=\mathfrak{E}$, daher $|\Omega_1(\mathfrak{Q})|=|\Omega_1(\mathfrak{R})|=p$ und folglich sind $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ zyklisch. Da nun $\mathfrak{T}$ eine zyklische p-Sylow-Gruppe hat, ist es nach Satz 4.4 p-einfach.

Sei $\mathfrak{N}\in s\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{Q}\nleqq\mathfrak{N}$. Dann ist $\mathfrak{N}\mathfrak{T}/\mathfrak{T}\cong\mathfrak{N}/\mathfrak{N}\cap\mathfrak{T}$ p-auflösbar. Ferner ist $\mathfrak{N}\cap\mathfrak{Q}\in s_{\mathfrak{G}}\mathfrak{P}$, aber $\mathfrak{N}\cap\mathfrak{Q}<\mathfrak{Q}$, daher also $\mathfrak{N}\cap\mathfrak{Q}=\mathfrak{E}$. Daraus folgt $\mathfrak{N}\cap\mathfrak{T}\cap\mathfrak{P}=$

$\mathfrak{N} \cap \mathfrak{Q} = \mathfrak{E}$ und die Ordnung von $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{T}$ ist somit zu p teilerfremd. Also ist $\mathfrak{N}$ p-auflösbar.

Sei nun $\mathfrak{N}$ der maximale p-auflösbare Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Nach der eben angestellten Überlegung enthält $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{P}$ alle $\mathfrak{X} \in s_{\mathfrak{G}} \mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{Q} \leqq \mathfrak{X}$. Sei $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{V}$. Wegen $\mathfrak{V} \cap \mathfrak{Q} = \mathfrak{E}$ ist $\mathfrak{V}$ zyklisch. Ferner gilt $(\mathfrak{Q}, \mathfrak{V}) \leqq (\mathfrak{T}, \mathfrak{N}) \cap \mathfrak{P} \leqq \mathfrak{T} \cap \mathfrak{N} \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{E}$, d.h. $\mathfrak{V}$ liegt im Zentralisator von $\mathfrak{Q}$. Sei $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}\mathfrak{R} = \langle Q \rangle \langle R \rangle$ mit $\mathfrak{Q} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{V} = \langle V \rangle$ mit $V = Q^a R^b$. Wegen $\mathfrak{V} \lhd \mathfrak{P}$ ist $V^R = V^c$ für ein geeignetes c, also $V^R = (Q^a)^R R^b = Q^{a'} R^b = (Q^a R^b)^c = Q^{a''} R^{bc}$. Wegen $\mathfrak{Q} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{E}$ können wir die Exponenten vergleichen und erhalten $c \equiv 1 \bmod$ Ordnung R^b. Aus $\mathfrak{V} \cap \mathfrak{Q} = \mathfrak{E}$ folgt aber Ordnung $R^b =$ Ordnung V. Also ist $V^R = V \in Z(\mathfrak{P})$, somit $\mathfrak{V} \leqq Z(\mathfrak{P})$, wie behauptet.



Wir erwähnen noch eine direkte Folgerung aus Satz 4.5:

4.6. Satz. *Sei $\mathfrak{P}$ eine metazyklische p-Gruppe mit $p > 2$. $\mathfrak{P}$ habe keinen zyklischen Normalteiler mit zyklischer Vertretergruppe. Ist $\mathfrak{P}$ die p-Sylow-Gruppe irgendeiner endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{G}$ p-auflösbar.*

Gruppen mit der in 4.6 geforderten Eigenschaft lassen sich leicht angeben; z.B. definieren die Relationen

$$A^{p^n} = E, \qquad B^{p^n} = A^{p^{n-1}}, \qquad B^{-1} A B = A^{1+p}$$

für $n > 2$ eine solche Gruppe der Ordnung p^{2n}.

Literatur

[1] Hall, P.: A contribution to the theory of groups of prime power order. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **36**, 29—95 (1933).

[2] Hall, P.: On the system normalizers of a soluble group. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **43**, 507—528 (1937).

[3] Hall, P., and G. Higman: On the p-length of p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem. Proc. Lond. Math. Soc. (3) **6**, 1—42 (1956).

[4] Huppert, B.: Über das Produkt von paarweise vertauschbaren zyklischen Gruppen. Math. Z. **58**, 243—264 (1953).

[5] Huppert, B.: Subnormale Untergruppen und p-Sylow-Gruppen. Erscheint demnächst in Acta Szeged.

[6] Iwasawa, K.: Über die endlichen Gruppen und die Verbände ihrer Untergruppen. J. Fac. Sci. Tokyo (2) **4**, 171—199 (1941).

[7] Taunt, D.: On A-groups. Proc. Cambridge philos. Soc. **45**, 24—42 (1948).

[8] Wielandt, H.: p-Sylow-Gruppen und p-Faktorgruppen. J. reine angew. Math. **182**, 180—193 (1940).

[9] Wielandt, H.: Sylow-Gruppen und Kompositionsstruktur. Abh. Math. Seminar Hamburg **22**, 215—228 (1958).

[10] Wielandt, H.: Beziehungen zwischen den Fixpunktzahlen von Automorphismengruppen einer endlichen Gruppe. Math. Z. **73**, 146—158 (1960).

[11] Zassenhaus, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie I. 1937.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 14. Oktober 1960)

Schäfke, F. W.
Math. Zeitschr. 75, 154—191 (1961)

Reihenentwicklungen analytischer Funktionen nach Biorthogonalsystemen spezieller Funktionen. II

Von

Friedrich Wilhelm Schäfke

Inhaltsübersicht

Teil I[1])

Einleitung
1. Elementare Hilfssätze
2. Eigenwertprobleme mit zwei Parametern
3. Anwendung auf die Hillsche Differentialgleichung

Teil II

4. Reihenentwicklungen nach Bessel-Funktionen $J_{\nu+n}(z)$, n ganz 154
5. Reihenentwicklungen nach Bessel-Funktionen $J_{\nu+n}((\nu+n)z)$, n ganz 165
6. Reienentwicklungen nach Whittakerschen Funktionen $M_{\varkappa,\nu+n}(z)$, n ganz 176
7. Reihenentwicklungen nach Kugelfunktionen 181

4. Reihenentwicklungen nach Bessel-Funktionen $J_{\nu+n}(z)$, n ganz

41. ν nicht ganz.

Sei ν eine nicht ganze (komplexe) Zahl. Wir suchen Lösungen der Besselschen Differentialgleichung

$$z\left(z\,y'(z)\right)' + (z^2 - \lambda)\,y(z) = 0 \tag{1}$$

mit der Umlaufseigenschaft

$$y(z\,e^{\pi i}) = e^{\pi i \nu}\,y(z) \not\equiv 0. \tag{2}$$

Man hat offenbar die Eigenwerte $\lambda = (\nu+2n)^2$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ und (bis auf konstanten Faktor bestimmt) die Eigenlösungen $J_{\nu+2n}(z)$. Wir erinnern dabei an

$$J_\nu(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2l}}{\Gamma(\nu+l+1)\,l!}. \tag{3}$$

Wie schon in **32** bemerkt, geht (1) durch $z = e^{it}$, $y(z) = u(t)$ in

$$u''(t) + (\lambda - e^{2it})\,u(t) = 0 \tag{4}$$

über; (2) entsprechend in

$$u(t+\pi) = e^{\pi i \nu}\,u(t) \not\equiv 0. \tag{5}$$

[1]) Teil I erschien in dieser Zeitschrift, Bd. 74, S. 436—470.

Hier aber ist unmittelbar die Theorie von **31** anwendbar. Zur Formulierung werden noch die Normierungsgrößen

$$\frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t_0-\pi} J_\nu(e^{it})\,J_{-\nu}(e^{it})\,dt$$
$$= \frac{1}{\pi i}\int_{z_0}^{z_0 e^{\pi i}} J_\nu(z)J_{-\nu}(z)\,\frac{1}{z}\,dz$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(-\nu+1)} = \frac{\sin\pi\nu}{\pi\nu}$$

benötigt. Ferner kann man ν durch $\nu+1$ ersetzen und beide Resultate — dies entspricht dann der Umlaufsrelation

$$y(z\,e^{2\pi i}) = e^{2\pi i\nu}\,y(z) \not\equiv 0 \tag{2'}$$

— zusammenfassen. So ergibt sich

Satz 1. *Sei ν nicht ganz. Dann gelten die Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint J_{\nu+n}(z)\,J_{-(\nu+m)}(z)\,\frac{1}{z}\,dz = \frac{\sin\pi(\nu+n)}{\pi(\nu+n)}\,\delta_{nm}.$$

Jede in einem Kreisring

$$0 \leqq \varrho_1 < |z| < \varrho_2 \leqq \infty$$

holomorphe Funktion $f(z)$ mit der Umlaufseigenschaft

$$f(z\,e^{2\pi i}) = e^{2\pi i\nu} f(z)$$

läßt sich eindeutig in eine Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n J_{\nu+n}(z)$$

entwickeln, die in jeder kompakten Teilmenge absolut gleichmäßig konvergiert. Die Koeffizienten sind

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{\pi(\nu+n)}{\sin\pi(\nu+n)}\oint f(z)\,J_{-(\nu+n)}(z)\,\frac{1}{z}\,dz.$$

Unmittelbar ersichtlich wegen (3) sind folgende

Zusätze.

1. *$f(z)$ läßt sich in der Form $f(z)=z^\nu g(z)$ darstellen, wo $g(z)$ im Kreisring eindeutig holomorph ist.*

2. *Ist hier $g(z)$ gerade, $g(-z)=g(z)$, so gilt*

$$c_n = 0 \quad (n \text{ ungerade}).$$

3. *Ist $g(z)$ ungerade, $g(-z)=-g(z)$, so gilt*

$$c_n = 0 \quad (n \text{ gerade}).$$

4. *Ist $g(z)$ in der vollen Kreisscheibe $|z|<\varrho_2$ holomorph, so gilt*

$$c_n = 0 \qquad (n<0).$$

In diesem Falle konvergiert die Reihe

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-\nu} J_{\nu+n}(z)$$

in kompakten Teilmengen dieser Kreisscheibe absolut gleichmäßig.

5. *Ist $g(z)$ in $0<|z|<\varrho_2$ holomorph und hat in 0 einen Pol der Ordnung m $(m=1, 2, 3, \ldots)$, so gilt*

$$c_n = 0 \qquad (n<-m).$$

Mit Hilfe dieser Resultate lassen sich zahlreiche spezielle Reihenentwicklungen angeben, deren Beweis durch die früher verwendete Methode der Reihentransformation (Umordnung von und in Potenzreihen) unangenehmere Rechenarbeit erfordert[2]).

So erhält man jetzt sofort

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\nu+2m)\,\Gamma(\nu+m)}{m!} J_{\nu+2m}(z) \tag{6}$$

wegen

$$\begin{aligned} c_{2m} &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\pi(\nu+2m)}{\sin \pi\nu} \oint \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} J_{-\nu-2m}(z) \frac{1}{z}\, dz \\ &= \frac{\pi(\nu+2m)}{\sin \pi\nu} (-1)^m \frac{1}{\Gamma(-\nu-m+1)\, m!} \\ &= \frac{(\nu+2m)\,\Gamma(\nu+m)}{m!}, \end{aligned}$$

was aus (3) und dem Ergänzungssatz für die Γ-Funktion ersichtlich ist.

Nach dieser relativ einfachen Entwicklung sei nun eine der allgemeinsten derartigen Reihen hergeleitet. Mit $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ gebildet, läßt sich nach Satz 1

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda-\mu-\nu} J_{\mu}(\alpha z)\, J_{\nu}(\beta z) = \sum_{r=0}^{\infty} c_{2r} J_{\lambda+2r}(z)$$

entwickeln, wobei

$$c_{2r} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\pi(\lambda+2r)}{\sin \pi(\lambda+2r)} \oint J_{\mu}(\alpha z)\, J_{\nu}(\beta z)\, J_{-(\lambda+2r)}(z) \left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda-\mu-\nu} \frac{1}{z}\, dz$$

ist. Nach (3) wird also

$$c_{2r} = \frac{\pi(\lambda+2r)}{\sin \pi(\lambda+2r)} \sum \frac{(-1)^m \alpha^{\mu+2m} (-1)^n \beta^{\nu+2n} (-1)^k}{\Gamma(\mu+m+1)\, m!\, \Gamma(\nu+n+1)\, n!\, \Gamma(-\lambda-2r+k+1)\, k!},$$

wobei die Summe über $m, n, k = 0, 1, 2, \ldots$ mit $k+m+n=r$ zu erstrecken ist. Setzt man $k=r-m-n$ und wendet den Ergänzungssatz der Γ-Funktion

[2]) Vgl. etwa ERDÉLYI, MAGNUS, OBERHETTINGER, TRICOMI, Higher transcendental functions II, p. 63ff., p. 98ff., New York-Toronto-London 1953 sowie die dort zitierten Originalarbeiten.

an, so wird (die Glieder mit $n+m>r$ sind 0)

$$c_{2r} = \frac{\alpha^\mu \beta^\nu}{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(\nu+1)} \cdot \frac{(\lambda-2r)\,\Gamma(\lambda+r)}{r!} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(-r)_{m+n}(\lambda+r)_{m+n}}{(\mu+1)_m\,(\nu+1)_n\,m!\,n!}\,\alpha^{2m}\beta^{2n}$$

daher hat man mit[3])

$$F_4(a,b;c,d;x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}\,(b)_{m+n}}{(c)_m\,(d)_n\,m!\,n!}\,x^m y^n$$

die Entwicklung[4])

$$(7)\quad \left\{ \left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda-\mu-\nu} J_\mu(\alpha z)\,J_\nu(\beta z) = \frac{\alpha^\mu\beta^\nu}{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(\nu+1)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\lambda+2r)\,\Gamma(\lambda+r)}{r!} \times \right.$$
$$\left. \times\, F_4(-r,\lambda+r;\mu+1,\nu+1;\alpha^2,\beta^2)\,J_{\lambda+2r}(z). \right.$$

Aus ihr können speziellere Entwicklungen durch Grenzübergang erhalten werden, der nach unseren Überlegungen an den einzelnen Koeffizienten ausgeführt werden kann. Man dividiert z.B. durch β^ν und läßt dann β gegen 0 gehen. Es gilt dann — das ergäbe sich auch als Anwendung von **31**, Satz 2 (Potenzreihenentwicklung nach μ) —

$$\beta^{-\nu} J_\nu(\beta z) \to \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}$$

gleichmäßig in kompakten Kreisringen um 0, die 0 nicht enthalten. Beachtet man noch

$$F_4(a,b;c,d;x,0) = {}_2F_1(a,b;c;x),$$

so entsteht

$$(8)\quad \left\{ \left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda-\mu} J_\mu(\alpha z) \right.$$
$$\left. = \frac{\alpha^\mu}{\Gamma(\mu+1)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\lambda+2r)\,\Gamma(\lambda+r)}{r!}\,{}_2F_1(-r,\lambda+r;\mu+1;\alpha^2)\,J_{\lambda+2r}(z). \right.$$

Auf die Spezialfälle $\lambda=\mu$ und $\alpha=1$[5]) sei nur hingewiesen; $\alpha\to 0$ ergibt natürlich die anfangs betrachtete Reihe (6).

Von besonderem Interesse ist die Entwicklung von $\frac{z^\nu}{t-z}$[6]). Für $|z|<|t|$ gilt nach Satz 1[6a])

$$(9)\qquad \frac{z^\nu}{t-z} = \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,\nu}(t)\,J_{\nu+n}(z)$$

mit

$$(10)\qquad A_{n,\nu}(t) = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{\pi(\nu+n)}{\sin\pi(\nu+n)} \oint \frac{z^\nu J_{-\nu-n}(z)}{t-z}\,\frac{1}{z}\,dz,$$

---

[3]) Vgl. J. Horn: Math. Ann. **105**, 381—407 (1931).

[4]) Vgl. W. N. Bailey: Quart. J. Math. Oxford Ser. **6**, 233—238 (1935).

[5]) Hier läßt sich ${}_2F_1$ durch die Γ-Funktion ausdrücken.

[6]) Vgl. Gegenbauer: Wiener Sitzugsber. **74**, (2) 124—130 (1877).

[6a]) Es sei bemerkt, daß sich aus unseren Überlegungen auch die gleichmäßige Konvergenz bezüglich z und t für $|z|\leqq\varrho_1<\varrho_2\leqq|t|$ ergibt.

wo etwa über einen Kreis $0<|z|=r<|t|$ zu integrieren ist. Entwickelt man

$$(t-z)^{-1}=\sum_{m=0}^{\infty} z^m t^{-m-1},$$

so kann gliedweise integriert werden, und mit der Abkürzung Ph = Polhauptteil bei 0, d.h.

$$Ph\left\{\sum_{r=-m}^{\infty} a_r z^r\right\}=\sum_{r=-m}^{-1} a_r z^r$$

folgt

$$A_{n,\nu}(t)=\frac{\pi(\nu+n)}{\sin\pi(\nu+n)}\,Ph\{t^{\nu-1}J_{-\nu-n}(t)\}. \tag{11}$$

Abgesehen von der mit unserer Theorie gegebenen neuen einfachen Beweismöglichkeit der Gegenbauerschen Entwicklung (9) ist anscheinend die Darstellung (11) kaum bekannt. In ihr sind die $A_{n,\nu}$ sehr einfach durch Bessel-Funktionen ausgedrückt. Man erhält sofort die explizite Darstellung

$$A_{n,\nu}(t)=\frac{2^{\nu+n}(\nu+n)}{t^{n+1}}\sum_{m=0}^{\leq\frac{1}{2}n}\frac{\Gamma(\nu+n-m)}{m!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m}. \tag{12}$$

Weiter können mit (11) z.B. Rekursionsformeln, Differentialgleichung und Umlaufsintegrale[7]) aus den entsprechenden bekannten Formeln für die Bessel-Funktionen offensichtlich leicht erhalten werden. Dies sei nur an einem Beispiel erläutert:

Wegen

$$\frac{d}{dz}Ph\{f(z)\}=Ph\{f'(z)\}$$

gilt

$$2A'_{n,\nu}(t)=\frac{\pi(\nu+n)}{\sin\pi(\nu+n)}\,Ph\left\{\frac{2}{t}(\nu-1)t^{\nu-1}J_{-\nu-n}(t)+2t^{\nu-1}J'_{-\nu-n}(t)\right\},$$

also mit

$$\frac{2}{t}J_{-\nu-n}(t)=\frac{1}{-\nu-n}\left(J_{-\nu-n-1}(t)+J_{-\nu-n+1}(t)\right),$$

$$2J'_{-\nu-n}(t)=J_{-\nu-n-1}(t)-J_{-\nu-n+1}(t)$$

nunmehr

$$2A'_{n,\nu}(t)=\frac{\pi}{\sin\pi(\nu+n)}\,Ph\{t^{\nu-1}[(n+1)J_{-\nu-n-1}(t)-(2\nu+n-1)J_{-\nu-n-1}(t)]\},$$

daher mit (11)

$$2A'_{n,\nu}(t)=\frac{2\nu+n-1}{\nu+n-1}A_{n-1,\nu}(t)-\frac{n+1}{\nu+n+1}A_{n+1,\nu}(t). \tag{13}$$

Insgesamt zeigt sich, daß man so einen neuen einfacheren, eben anscheinend naturgemäßen Zugang zur Theorie dieser Polynome von GEGENBAUER hat. Eine Ausdehnung dieser Überlegungen auf die Neumannschen und

[7]) Vgl. l.c. [6]), oder auch G. N. WATSON: A Treatise on the Theory of Bessel Functions, S. 283ff. Cambridge 1952.

Kapteynschen Polynome und Verallgemeinerungen werden sich in analoger Weise unten ergeben.

42. $\nu = 0$, ALS GRENZFALL BETRACHTET.

Sei $g(z)$ im Kreisring $0 \leqq r_1 < |z| < r_2 \leqq \infty$ eindeutig analytisch und gerade. Dann gilt nach Satz 1 für jedes nicht ganze ν eine Entwicklung

$$z^\nu g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{\nu,2n} J_{\nu+2n}(z), \tag{1}$$

die in jedem abgeschlossenen Teilkreisring absolut gleichmäßig konvergiert.

Wir betrachten nun alle ν auf dem Kreise $|\nu| = \frac{1}{2}$ oder auf dem Kreise $|\nu - 1| = \frac{1}{2}$ und wollen zeigen, daß die Gleichmäßigkeit auch bezüglich dieser ν gilt.

Dazu kann man den Ursprung der Abschätzungen von **23**, Satz 9 aufsuchen. Als bestimmende Größen treten hier zunächst α und γ auf. γ ist für unser Problem von ν unabhängig, α kann offenbar als gleich für alle die genannten ν gewählt werden, wie die Überlegungen von Teil I, S. 461 zeigen. Außerdem tritt nur noch das Integral

$$\oint_{\mathfrak{C}_k} S_2(\lambda) \, |d\lambda| \tag{2}$$

auf. Hierzu gehen wir mit den entsprechenden Eigenwerten $\lambda_n = \frac{1}{4}(\nu + 2n)^2$ $(n = \cdots, -1, 0, 1, \ldots)$ die Abschätzungen von Abschnitt **1** durch. Die Aussagen von Hilfssatz 1 gelten gleichmäßig bezüglich a, b, c_m^*, falls a, b nach oben und $1 - b + a$, $a - b$, b nach unten durch positive Zahlen gleichmäßig beschränkt sind, wie der Beweis zeigt. Hilfssatz 2 gilt offenbar für unsere ν gleichmäßig. Dasselbe trifft für Hilfssatz 3 zu. Denn hier ist $\vartheta = \nu$ zu setzen und für alle unsere ν wird $\delta = \frac{1}{2}$. Damit folgt auch die Gleichmäßigkeit der Abschätzungen in Hilfssatz 4, insbesondere der $O\left(\frac{1}{k} \log k\right)$ — Aussage für (2).

Weiter sind nun für $\mu = 0$, d.h. im Falle der entsprechenden Laurent-Reihen, die Entwicklungen auch bezüglich unserer ν gleichmäßig konvergent. Dann aber gibt **23**, Satz 9 das gewünschte Resultat auch für (1).

Damit ist es erlaubt in (1) die Operationen

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\nu| = \frac{1}{2}} \cdots \frac{1}{\nu} \, d\nu, \qquad \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\nu - 1| = \frac{1}{2}} \cdots \frac{1}{\nu - 1} \, d\nu$$

gliedweise auszuführen, wobei immer noch die absolut gleichmäßige Konvergenz bezüglich z erhalten bleibt.

Betrachten wir zunächst die erste Operation. Sie ergibt links $g(z)$. Rechts wollen wir die Glieder mit n und $-n$ zusammenfassen. Dann hat man, wenn man die Integration über ζ und die Faktoren $g(\zeta)$, $\frac{1}{\zeta}$, $\frac{1}{2\pi i}$ fortläßt, die Operation — wir sehen zunächst $n = 1, 2, 3, \ldots$ an — auf

$$\frac{\pi \zeta^\nu}{\sin \pi \nu} \left[(\nu + 2n) J_{-\nu-2n}(\zeta) J_{\nu+2n}(z) + (\nu - 2n) J_{-\nu+2n}(\zeta) J_{\nu-2n}(z) \right]$$

auszuüben. Setzt man für $n=1, 2, 3, \ldots$

$$L_{2n}(z) = J_{2n}(z) + 2n \frac{\partial}{\partial \nu} [J_{\nu+2n}(z) - J_{\nu-2n}(z)]|_{\nu=0},$$

so ergibt sich

$$L_{2n}(\zeta) J_{2n}(z) + J_{2n}(\zeta) L_{2n}(z).$$

Für $n=0$ entsteht ähnlich $J_0(\zeta) J_0(z)$.

So folgt nach unseren vorangehenden Überlegungen die Entwicklung

$$g(z) = c_0 J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_{2n} J_{2n}(z) + c_{-2n} L_{2n}(z)\right)$$

mit

$$c_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint g(\zeta) J_0(\zeta) \frac{1}{\zeta} d\zeta,$$

$$c_{2n} = \frac{1}{2\pi i} \oint g(\zeta) L_{2n}(\zeta) \frac{1}{\zeta} d\zeta,$$

$$c_{-2n} = \frac{1}{2\pi i} \oint g(\zeta) J_{2n}(\zeta) \frac{1}{\zeta} d\zeta.$$

Betrachten wir jetzt analog die zweite Operation, die links $z g(z)$ ergibt. Rechts fassen wir die Glieder mit n und $-n-1$ für $n=0, 1, 2, \ldots$ zusammen. Dann ist, wenn man die Integration über ζ und die Faktoren $\zeta g(\zeta) \frac{1}{\zeta} \frac{1}{2\pi i}$ fortläßt, die Operation auf

$$-\frac{\pi \zeta^{\nu-1}}{\sin \pi(\nu-1)} [(\nu - 1 + 2n + 1) J_{-\nu-2n}(\zeta) J_{\nu+2n}(z) + (\nu - 1 - 2n - 1) \times \\ \times J_{-\nu+2n+2}(\zeta) J_{\nu-2n-2}(z)]$$

anzuwenden. Man setzt nun

$$L_{2n+1}(\zeta) = J_{2n+1}(\zeta) + (2n+1) \frac{\partial}{\partial \nu} [J_{\nu+2n+1}(\zeta) + J_{\nu-2n-1}(\zeta)]|_{\nu=0}.$$

Dann ergibt sich

$$L_{2n+1}(\zeta) J_{2n+1}(z) + J_{2n+1}(\zeta) L_{2n+1}(z).$$

Damit folgt nach unseren vorangehenden Überlegungen die Entwicklung

$$z g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(c_{2n+1} J_{2n+1}(z) + c_{-2n-1} L_{2n+1}(z)\right)$$

mit

$$c_{2n+1} = \frac{1}{2\pi i} \oint \zeta g(\zeta) L_{2n+1}(\zeta) \frac{1}{\zeta} d\zeta,$$

$$c_{-2n-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint \zeta g(\zeta) J_{2n+1}(\zeta) \frac{1}{\zeta} d\zeta.$$

Entsprechend der Aufspaltung in eine gerade und eine ungerade Funktion können beide Ergebnisse bequem zusammengefaßt werden:

SATZ 2. *Es sei gesetzt*

$$(3) \qquad L_n(z) = J_n(z) + n \frac{\partial}{\partial \nu} [J_{\nu+n}(z) - (-1)^n J_{\nu-n}(z)]|_{\nu=0}$$

für $n=0, 1, 2, \ldots$. *Diese Funktionen sind für* $0<|z|<\infty$ *eindeutig holomorph; sie haben in* 0 *einen Pol n-ter Ordnung.*

Ist $g(z)$ *im Kreisring* $0\leqq r_1<|z|<r_2\leqq\infty$ *eindeutig holomorph, so gilt bei absolut gleichmäßiger Konvergenz in kompakten Teilkreisringen*

$$g(z)=c_0 J_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}[c_n J_n(z)+c_{-n} L_n(z)]$$

mit den Koeffizienten

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint g(\zeta)\, L_n(\zeta)\,\frac{1}{\zeta}\,d\zeta \qquad (n=0, 1, 2, \ldots),$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint g(\zeta)\, J_n(\zeta)\,\frac{1}{\zeta}\,d\zeta \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Ist speziell $g(z)$ *im Kreise* $|z|<r_2$ *holomorph, so sind* $c_{-n}=0$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$. *Die Reihe*

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n J_n(z)$$

ist dann in jedem abgeschlossenen Teilkreis absolut gleichmäßig konvergent.

Zum Beweise der letzten Tatsache kann man etwa die Operation

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\varrho}\frac{\cdots}{z-t}\,dz$$

für $|t|\leqq\varrho'<\varrho$ gliedweise anwenden.

Ergänzend zu Satz 2 würde man sich Eindeutigkeit der Entwicklungen bzw. äquivalent dazu Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen wünschen. Ferner vermißt man die Aufspaltung der Reihe entsprechend den J_n und den L_n. Schließlich wird die Zerlegung einer im Kreisring $r_1<|z|<r_2$ eindeutig holomorphen Funktion $g(z)$ eindeutig in der Form $g_0(z)+g_\infty(z)$, wo $g_0(z)$ in $|z|<r_2$ holomorph ist und $g_\infty(z)$ in $|z|>r_1$ holomorph ist und in ∞ verschwindet, nicht widergespiegelt.

Die gewünschten Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen folgen einfach aus denen für nicht ganzes ν. Man hat etwa für n, m ganz und $n^2\neq m^2$

$$\oint J_{-\nu-m}(t)\,\frac{1}{\nu}\,[J_{\nu+n}(t)-(-1)^n J_{\nu-n}(t)]\,\frac{1}{t}\,dt=0,$$

also für $\nu\to 0$ wegen gleichmäßiger Konvergenz auf dem Integrationswege und wegen

(a) $$\frac{1}{2\pi i}\oint J_m(t)\, J_n(t)\,\frac{1}{t}\,dt=\begin{cases}1 & (n=m=0)\\ 0 & (\text{sonst})\end{cases}$$

die Relationen

(b) $$\oint J_m(t)\, L_n(t)\,\frac{1}{t}\,dt=0 \qquad (n\neq m;\ n, m=0, 1, 2, \ldots).$$

Ähnlich folgt aus

$$\oint\frac{1}{\nu}\,[J_{-\nu-m}(t)-(-1)^m J_{-\nu+m}(t)]\,\frac{1}{\nu}\,[J_{\nu+n}(t)-(-1)^n J_{\nu-n}(t)]\,\frac{1}{t}\,dt=0$$

für alle n, m mit $n^2 \neq m^2$, bzw. $\to 0$ für $n^2 = m^2$ bei $\nu \to 0$

$$\text{(c)} \qquad \oint L_m(t)\, L_n(t)\, \frac{1}{t}\, dt = 0 \qquad (n, m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Die verbleibende Relation

$$\text{(d)} \qquad \frac{1}{2\pi i} \oint J_n(t)\, L_n(t)\, \frac{1}{t}\, dt = 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

folgt nun zusammen mit (b), (c), indem man die Entwicklung von $L_n(z)$ gemäß Satz 1 betrachtet, die $L_n(z) = c_{-n} L_n(z)$ lauten muß. Wir fassen zusammen in

SATZ 3. *Bezüglich eines* 0 *einmal positiv umlaufenden Weges gelten die Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint J_m(t)\, J_n(t)\, \frac{1}{t}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \oint L_m(t)\, L_n(t)\, \frac{1}{t}\, dt = \begin{cases} 1 & (n = m = 0) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint J_n(t)\, L_m(t)\, \frac{1}{t}\, dt = \begin{cases} 1 & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

$$(n, m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Jede in einem Kreisring um 0 *eindeutige holomorphe Funktion* $g(z)$ *läßt sich eindeutig in eine in kompakten Teilmengen gleichmäßig konvergente Reihe*

$$g(z) = c_0 J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n J_n(z) + c_{-n} L_n(z)]$$

entwickeln.

Um aus dieser Entwicklung eine Modifikation zu erhalten, die die vorhin erwähnte Trennung $g(z) = g_0(z) + g_\infty(z)$ widerspiegelt, betrachtet man am besten — das kommt auch mit den Koeffizientenformeln und mit der Entwicklung von $\frac{1}{t - z}$ herein —

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} \varepsilon_n O_n(z) = Ph\left\{\frac{1}{z} L_n(z)\right\} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \\ \qquad (\varepsilon_0 = 1,\ \varepsilon_n = 2\ (n = 1, 2, 3,)), \end{cases}$$

wo Ph wieder den Polhauptteil bei 0 bezeichnet. Wir erhalten

SATZ 4. $O_n(z)$ *ist ein Polynom* $(n+1)$*-ten Grades in* $1/z$ *ohne freies Glied. Es gilt*

$$\text{(5)} \qquad O_0(z) = \frac{1}{z}$$

und für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\text{(6)} \qquad O_n(z) = (-1)^n \frac{n}{2} Ph\left\{\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} J_{-\nu-n}(z)\big|_{\nu=0}\right\}$$

bzw.[8])

$$\text{(7)} \qquad O_n(z) = -\frac{n}{2} Ph\left\{\frac{\pi}{z} Y_n(z)\right\}.$$

[8]) Vgl. die nachfolgenden Erläuterungen.

Man hat die Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen $(n, m = 0, 1, 2, \ldots)$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint O_n(z)\, O_m(z)\, dz = 0 \tag{8}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint J_n(z)\, O_m(z)\, dz = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_m} & (n = m) \\ 0 & (n \neq m). \end{cases} \tag{9}$$

Es gilt für $|t| > |z|$

$$\frac{1}{t - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n O_n(t)\, J_n(z). \tag{10}$$

Schließlich ist

$$\varepsilon_n O_n(z) = \lim_{\nu \to 0} A_{n,\nu}(z). \tag{11}$$

Hier ist (5) aus $L_0(z) = J_0(z)$ ersichtlich. (6) folgt aus der Definition (3):

$$\begin{aligned} Ph\,\frac{1}{z} L_n(z) &= Ph\left\{\frac{1}{z}\left(J_n(z) + n\,\frac{\partial}{\partial \nu}\left[J_{\nu+n}(z) - (-1)^n J_{\nu-n}(z)\right]\Big|_{\nu=0}\right)\right\} \\ &= Ph\left\{\frac{n}{z}\,\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}[\ldots]\Big|_{\nu=0}\right\} \\ &= Ph\left\{\frac{n}{z}(-1)^n \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} J_{-\nu-n}(z)\Big|_{\nu=0}\right\}, \end{aligned}$$

da $\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} J_{\nu+n}(z)$ nur positive Potenzen von z enthält; ferner ist zuletzt noch ν statt $-\nu$ substituiert worden. (7) ergibt sich analog wegen[9])

$$\begin{aligned} Y_n(z) &= \lim_{\nu \to 0} Y_{\nu+n}(z) = \lim_{\nu \to 0} \frac{1}{\sin \nu\pi}\left[J_{\nu+n}(z) - (-1)^n J_{-\nu-n}(z)\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\,\frac{\partial}{\partial \nu}[\ldots]\Big|_{\nu=0} \\ &= \frac{2}{\pi} J_n(z) \log\frac{z}{2} - \frac{1}{\pi}\,\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\left[J_{-\nu+n}(z) + (-1)^n J_{-\nu-n}(z)\right]\Big|_{\nu=0}, \end{aligned}$$

wenn man nur in naheliegender Weise

$$Ph\left\{\sum_{m=-n}^{\infty} a_m z^m + \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m \cdot \log z\right\} = \sum_{m=-n}^{-1} a_m z^m$$

verabredet. (8) ist trivial und (9) folgt aus (Satz 3)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint J_n(z)\, L_m(z)\,\frac{1}{z}\, dz = \begin{cases} 1 & (n = m) \\ 0 & (n \neq m), \end{cases}$$

da nur der Polhauptteil von $\frac{1}{z} L_m(z)$ zum Integral einen Beitrag liefert. (10) ist mit Satz 2 herzuleiten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t - z} &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)\, J_n(z), \\ c_n(t) &= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{1}{t - z} L_n(z)\,\frac{1}{z}\, dz \\ &= \varepsilon_n O_n(t). \end{aligned}$$

[9]) Vgl. l. c. [2]), S. 4, Formel (4) und S. 7, Formel (28).

(11) schließlich muß gelten, weil nach unseren Überlegungen speziell die Reihe **41**, (9) für $\nu \to 0$ in (10) übergeht.

Die $O_n(z)$ sind — sonst zunächst durch (10) ad hoc definiert und durch Reihenumordnung erhalten — die Neumannschen Polynome[10]). Wie wir sahen, liefert auch hier unsere Theorie einen bequemen und naturgemäßen Zugang. Insbesondere sind anscheinend die Zusammenhänge (6) und (7) bisher übersehen worden.

(7) ergibt natürlich sofort die explizite Darstellung als Polynom in $\frac{1}{z}$

$$(12) \qquad O_n(z) = \frac{n}{4} \sum_{m=0}^{\leqq \frac{n}{2}} \frac{(n-m-1)!}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Weiter aber wird (7) offenbar zur Herleitung von Rekursionsformeln, Differentialgleichung und anderem — ähnlich, wie wir es in **41** zeigten — besonders nützlich. Auf die Polynome von SCHLÄFLI gehen wir in diesem Zusammenhang nicht ein.

Wir geben nunmehr eine Herleitung des Neumannschen Entwicklungssatzes und beweisen

SATZ 5. *$g(z)$ sei im Kreisring $0 \leqq r_1 < |z| < r_2 \leqq \infty$ eindeutig holomorph. Dann läßt sich $g(z)$ eindeutig in eine in kompakten Teilmengen absolut gleichmäßig konvergente Reihe*

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(z) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n O_n(z)$$

entwickeln. Die Koeffizienten sind

$$a_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i} \oint g(z)\, O_n(z)\, dz, \qquad b_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i} \oint g(z)\, J_n(z)\, dz.$$

Ist $g(z)$ auch um 0 holomorph, so gilt $b_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$; die Reihe

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(z)$$

ist dann auch um 0 absolut gleichmäßig konvergent. Ist $g(z)$ auch um ∞ holomorph und verschwindet in ∞, so gilt $a_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$; die Reihe

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n O_n(z)$$

ist dann auch um ∞ absolut gleichmäßig konvergent.

Zum Beweise sei $g(z) = g_0(z) + g_\infty(z)$ zerlegt, wo $g_0(z)$ in $|z| < r_2$ und $g_\infty(z)$ in $|z| > r_1$ holomorph sind und $g_\infty(\infty) = 0$ gilt. Wir entwickeln gemäß Satz 2 für $|z| < r_2$:

$$g_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n J_n(z);$$

[10]) Vgl. z. B. l. c. [7]), S. 271 ff.

dabei sind

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint g_0(z)\, L_n(z)\, \frac{1}{z}\, dz = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i} \oint g_0(z)\, O_n(z)\, dz = a_n$$

wegen (4). Weiter entwickeln wir gemäß Satz 2

$$z\, g_\infty(z) = c_0 J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n J_n(z) + c_{-n} L_n(z)].$$

Wir dividieren mit z und wenden die Operation

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\varrho} \frac{\cdots}{z-t}\, dz$$

für $|t| \geqq \varrho_1 > \varrho$ an, was wegen gleichmäßiger Konvergenz gliedweise geschehen kann. Indem wir statt t wieder z schreiben, erhalten wir für $|z| > r_1$ mit absolut gleichmäßiger Konvergenz in abgeschlossenen Teilmengen

$$g_\infty(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{-n}\, Ph\left\{\frac{1}{z} L_n(z)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{-n}\, \varepsilon_n O_n(z).$$

Dabei sind offenbar $\varepsilon_n\, c_{-n} = b_n$. Die Eindeutigkeit der Entwicklungen folgt mit Satz 4, (8), (9). Damit ist Satz 5 voll bewiesen.

5. Reihenentwicklungen nach Bessel-Funktionen $J_{\nu+n}((\nu+n)z)$, n ganz (Kapteynsche Reihen)

51. ν NICHT GANZ.

Wir gehen davon aus, daß offenbar $u(z) = J_\mu(\mu z)$ der Differentialgleichung

(1) $$z(z u')' + \mu^2(z^2 - 1)\, u = 0$$

genügt. Daraus ist ersichtlich, daß für nicht ganzes ν das Eigenwertproblem

(2) $$z(z u')' + \lambda(z^2 - 1)\, u = 0$$

(3) $$u(z e^{\pi i}) = e^{\pi i \nu} u(z) \not\equiv 0$$

genau die Eigenwerte $\lambda = (\nu + 2n)^2$ und die (bis auf konstanten Faktor eindeutig bestimmten) Eigenlösungen

$$u = J_{\nu+2n}((\nu + 2n) z)$$

mit $n = \cdots, -1, 0, 1, \ldots$ hat. Um hier die Theorie von **3** anwenden zu können, muß auf ein entsprechendes Problem für eine Hillsche Differentialgleichung transformiert werden.

Wir führen die Umrechnung an (1) durch mit dem Ansatz

$$\frac{dt}{dz} = b(z), \qquad u(z) = a(z)\, v(t).$$

Indem wir mit $'$ bzw. $\cdot$ die Differentiationen nach z bzw. t kennzeichnen, erhalten wir

$$u' = a'v + ab\dot{v},$$

$$(zu')' + \mu^2 \frac{z^2-1}{z} u = zab^2\ddot{v} + [za'b + (zab)']\dot{v} + (za')'v + \mu^2 a \frac{z^2-1}{z} v.$$

Soll (1) die Form

$$\ddot{v}(t) + \left(\mu^2 + g(t)\right) v(t) = 0 \tag{4}$$

erhalten, so muß

$$(zb)^2 = z^2 - 1, \qquad a' 2zb + a(zb)' = 0$$

gelten. Indem wir die Potenzen von $(1-z^2)$ durch die Schnitte $(-\infty, -1]$ und $[1, +\infty)$ sowie durch die Verabredung des Hauptwertes auf $(-1, 1)$ eindeutig erklären, setzen wir daher

$$t = -i \int_1^z (1-\zeta^2)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\zeta} d\zeta, \qquad v(t) = (1-z^2)^{\frac{1}{4}} u(z).$$

Es wird offenbar

$$it = \log z + (1-z^2)^{\frac{1}{2}} - \log\left(1 + (1-z^2)^{\frac{1}{2}}\right);$$

t nimmt bei halbem positivem Umlauf um $z=0$ um π zu. Man erhält ferner

$$g(t) = \frac{z(za')'}{a(z^2-1)}, \qquad a(z) = (1-z^2)^{-\frac{1}{4}}.$$

Dies ist eine gerade Funktion von z; also gilt

$$g(t+\pi) = g(t). \tag{5}$$

Wir bemerken noch, daß $g(t) \to 0$ für $z \to 0$, also für $\operatorname{Im} t \to +\infty$ gilt.

Um nun die Überlegungen von Abschnitt 3 anwenden zu können, wird man einen möglichst großen Streifen der t-Ebene parallel der reellen Achse abzubilden suchen. Man erkennt, daß hier nur die Halbebene $\operatorname{Im} t > 0$ in Frage kommt. Sie wird auf das entsprechend dem Umlauf um 0 unendlich oft überdeckte Gebiet $\mathfrak{L}$:

$$|w(z)| < 1 \tag{6}$$

mit

$$w(z) = e^{it} = \frac{z\, e^{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}}{1 + (1-z^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{7}$$

abgebildet[11].) Wir bemerken, daß es eine echte Teilmenge des Kreises $|z| < 1$ ist. (3) entspricht jetzt

$$v(t+\pi) = e^{\pi i \nu} v(t) \not\equiv 0. \tag{8}$$

[11]) Bezüglich des Gebiets $\mathfrak{L}$ vgl. etwa l.c. [7]), S. 279f.

Auf (4), (8) ist nun die Theorie von **31** anwendbar. Zur Formulierung des Resultats benötigen wir noch die Normierungsintegrale

$$\frac{1}{\pi i}\int_{z_0}^{z_0 e^{\pi i}} J_\mu(\mu z)\, J_{-\mu}(\mu z)\, \frac{1-z^2}{z}\, dz = \frac{\sin \pi\mu}{\pi\mu}.$$

Indem wir wieder ν durch $\nu+1$ ersetzen und beide Resultate zusammenfassen, erhalten wir

SATZ 1. *ν sei nicht ganz. Dann gelten die Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint J_{\nu+n}\big((\nu+n)z\big)\, J_{-\nu-m}\big((\nu+m)z\big)\, \frac{1-z^2}{z}\, dz = \frac{\sin\pi(\nu+n)}{\pi(\nu+n)}\,\delta_{nm}.$$

Jede in einem Gebiet (vom Ringtypus um 0)

$$0 \leqq \varrho_1 < |w(z)| < \varrho_2 \leqq 1$$

holomorphe Funktion $f(z)$ mit der Umlaufsrelation

$$f(z\,e^{2\pi i}) = e^{2\pi i\nu} f(z)$$

läßt sich eindeutig in eine Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n J_{\nu+n}\big((\nu+n)z\big)$$

entwickeln, die in jeder kompakten Teilmenge absolut gleichmäßig konvergiert. Die Koeffizienten sind

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{\pi(\nu+n)}{\sin\pi(\nu+n)}\oint f(z)\, J_{-\nu-n}\big((\nu+n)z\big)\, \frac{1-z^2}{z}\, dz.$$

Offenbar gelten hier fast wörtlich die Zusatzbemerkungen zu **41**, Satz 1.

Als Anwendung leiten wir zuerst die Entwicklung von $\left(\frac{z}{2}\right)^\nu$ her[12]:

$$\left(\frac{z}{2}\right)^\nu = \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} J_{\nu+2m}\big((\nu+2m)z\big),$$

$$\begin{aligned} c_{2m} &= \frac{1}{2\pi i}\,\frac{\pi(\nu+2m)}{\sin\pi\nu}\oint \left(\frac{z}{2}\right)^\nu J_{-\nu-2m}\big((\nu+2m)z\big)\, \frac{1-z^2}{z}\, dz \\ &= (\nu+2m)^{-\nu+1}\,\frac{\pi}{\sin\pi\nu}\,\frac{1}{2\pi i}\oint \left(\frac{\zeta}{2}\right)^\nu J_{-\nu-2m}(\zeta)\,\frac{1}{\zeta}\,d\zeta - \\ &\quad - 4(\nu+2m)^{-\nu-1}\,\frac{\pi}{\sin\pi\nu}\,\frac{1}{2\pi i}\oint \left(\frac{\zeta}{2}\right)^{\nu+2} J_{-\nu-2m}(\zeta)\,\frac{1}{\zeta}\,d\zeta \\ &= \frac{\Gamma(\nu+m)}{m!\,(\nu+2m)^{\nu-1}} - 4\,\frac{\Gamma(\nu+m+1)\,m}{m!\,(\nu+2m)^{\nu+1}} \\ &= \frac{\nu^2\,\Gamma(\nu+m)}{(\nu+2m)^{\nu+1}\,m!}. \end{aligned}$$

[12]) Bezüglich der Schwierigkeiten, die die Herleitung früher bot, vgl. etwa die Ausführungen l.c. [7]), S. 564ff., S. 571.

Man hat also

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} = \nu^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+m)}{(\nu+2m)^{\nu+1}\, m!} J_{\nu+2m}\big((\nu+2m)\, z\big) \tag{9}$$

mit absolut gleichmäßiger Konvergenz in kompakten Teilmengen von $0<|w(z)|<1$.

Wir leiten weiter ein Analogon zu **41**, (7) her, das anscheinend unbekannt ist. Wir entwickeln

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda-\mu-\nu}(1-z^2)^{-1} J_\mu(\alpha z)\, J_\nu(\beta z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} J_{\lambda+2m}\big((\lambda+2m)\, z\big)$$

mit

$$\begin{aligned} c_{2m} &= \frac{\pi\,(\lambda+2m)}{\sin\pi\lambda}\, \frac{1}{2\pi i} \oint \left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda-\mu-\nu} J_\mu(\alpha z)\, J_\nu(\beta z)\, J_{-\lambda-2m}\big((\lambda+2m)\, z\big)\, \frac{1}{z}\, dz \\ &= \frac{\pi(\lambda+2m)^{\mu+\nu-\lambda+1}}{\sin\pi\lambda}\, \frac{1}{2\pi i} \oint \left(\frac{\zeta}{2}\right)^{\lambda-\mu-\nu} J_\mu(\alpha_m \zeta) J_\mu(\beta_m \zeta)\, J_{-\lambda-2m}(\zeta)\, \frac{1}{\zeta}\, d\zeta, \\ \alpha_m &= \alpha(\lambda+2m)^{-1}, \qquad \beta_m = \beta(\lambda+2m)^{-1}. \end{aligned}$$

Hier ist das Integral für **41**, (7) berechnet worden. So hat man sofort

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda-\mu-\nu}(1-z^2)^{-1} J_\mu(\alpha z)\, J_\nu(\beta z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^\mu \beta^\nu (\lambda+2m)^{1-\lambda}\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(\nu+1)\, m!} \times \\ &\qquad \times F_4(-m, \lambda+m; \mu+1, \nu+1; \alpha_m^2, \beta_m^2)\, J_{\lambda+2m}\big((\lambda+2m)\, z\big) \end{aligned}\right. \tag{10}$$

mit absolut gleichmäßiger Konvergenz in kompakten Teilmengen von $0<|w(z)|<1$. Der Faktor $(1-z^2)^{-1}$ kann offenbar beseitigt werden, indem man die Reihen für $\lambda+2$ statt λ aufschreibt und mit (10) entsprechend kombiniert. Analog kann statt $(1-z^2)^{-1}$ auch $(1-z)^{-1}$ bzw. $(1+z)^{-1}$ erhalten werden. Als Grenzfall $\beta\to 0$ notieren wir noch

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda-\mu}(1-z^2)^{-1} J_\mu(\alpha z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^\mu (\lambda+2m)^{1-\lambda}\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\mu+1)\, m!} \times \\ &\qquad \times {}_2F_1(-m, \lambda+m; \mu+1; \alpha_m^2)\, J_{\lambda+2m}\big((\lambda+2m)\, z\big). \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Für $\alpha\to 0$ entsteht hieraus natürlich wieder im wesentlichen (9).

Eine Entwicklung ganz anderer Art ist[12a])

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{\nu+2m} t^{2m} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+t\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-t\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}+m-t\right)\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}+m+t\right)} \\ &\qquad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+n)\, 2^\nu J_{\nu+2n}\big((\nu+2n)\, z\big)}{(\nu+2n)^{-1}\, n!\left(t^2-\left(n+\frac{\nu}{2}\right)^2\right)}. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Es handelt sich offenbar um eine Verallgemeinerung der Reihen von MEISSEL[13]), die sich für $\nu=2$ und $\nu=1$ ergeben. Die Reihe links stellt — bei absolut

[12a]) Vgl. W. N. BAILEY: Proc. Lond. Math. Soc. **33**, 154—159 (1932).

[13]) Vgl. MEISSEL: Astr. Nachr. **130**. 363—368 (1892), oder l.c. [7]), S. 557f., S. 561ff.

gleichmäßiger Konvergenz in entsprechenden kompakten Teilgebieten bezüglich ν, t^2, z — eine für $t^2 \neq \left(\frac{\nu}{2}+k\right)^2$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$, $0<|z|<\infty$ holomorphe Funktion von ν, t^2 z dar. Indem wir $\nu \neq$ ganz fest annehmen, entwickeln wir (Satz 1)

$$f(t,z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}(t^2)\, J_{\nu+2n}\big((\nu+2n)\,z\big)$$

innerhalb $0<|w(z)|<1$. Die Koeffizientenformel

$$(*) \qquad c_{2n}(t^2)=\frac{1}{2\pi i}\,\frac{\pi(\nu+2n)}{\sin\pi\nu}\oint f(t,z)\, J_{-\nu-2n}\big((\nu+2n)\,z\big)\,\frac{1-z^2}{z}\,dz$$

zeigt, daß

$$c_{2n}(t^2) \quad \text{für} \quad t^2 \neq \left(\frac{\nu}{2}+k\right)^2 \quad (k=0, 1, 2, \ldots)$$

eindeutig holomorph ist und an diesen Stellen höchstens einfache Pole hat. Wir bilden nun die Residuen

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\left|t^2-\left(\frac{\nu}{2}+k\right)^2\right|=\epsilon} c_{2n}(t^2)\,d(t^2).$$

In (*) kann dazu die Integration über t^2 mit der über z vertauscht werden. Das Residuum von $f(t,z)$ bei $t^2=\left(\frac{\nu}{2}+k\right)^2$ ist aber offenbar gerade

$$\frac{\Gamma(\nu+k)\,2^{\nu}}{(\nu+2k)^{\nu-1}\,k!}\,J_{\nu+2k}\big((\nu+2k)\,z\big).$$

Daher hat $c_{2n}(t^2)$ im Endlichen nur den einen einfachen Pol $\left(\frac{\nu}{2}+n\right)^2$ mit dem Residuum

$$\frac{\Gamma(\nu+n)\,2^{\nu}}{(\nu+2n)^{\nu-1}\,n!}.$$

Überdies gilt $c_{2n}(\infty)=0$. Denn diese Eigenschaft haben alle Potenzreihenkoeffizienten in (12). Sie überträgt sich auf $c_{2n}(t^2)$, indem man in (*) die auf dem Integrationswege gleichmäßig konvergente Potenzreihe von

$$z^{\nu}\,J_{-\nu-2n}\big((\nu+2n)\,z\big)$$

gliedweise integriert. Beide Eigenschaften von $c_{2n}(t^2)$ ergeben nun aber die in (12) notierte Gestalt. Diese Herleitung ist wesentlich einfacher als die von Bailey, l. c.[12a]).

Von besonderem Interesse ist schließlich wieder die Entwicklung

$$(13) \qquad \frac{z^{\nu}}{t-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{A}_{n,\nu}(t)\,J_{\nu+n}\big((\nu+n)\,z\big),$$

für die wir

$$(14) \qquad \mathfrak{A}_{n,\nu}(t)=\frac{1}{2\pi i}\,\frac{\pi(\nu+n)}{\sin\pi(\nu+n)}\oint\frac{z^{\nu}\,J_{-\nu-n}\big((\nu+n)\,z\big)}{t-z}\,\frac{1-z^2}{z}\,dz$$

erhalten, also

$$\mathfrak{A}_{n,\nu}(t) = \frac{\pi(\nu+n)}{\sin\pi(\nu+n)}\, Ph\{t^{\nu-1}(1-t^2)\, J_{-\nu-n}((\nu+n)\,t)\}. \tag{15}$$

Daraus ist, indem man mit **41**, (11) vergleicht, sofort

$$\mathfrak{A}_{n,\nu}(t) = (\nu+n)^{-\nu+1} A_{n,\nu}((\nu+n)\,t) - (\nu+n)^{-\nu-1} A_{n-2,\nu+2}((\nu+n)\,t) \tag{16}$$

abzulesen, sowie mit **41**, (12) die explizite Darstellung

$$\mathfrak{A}_{n,\nu}(t) = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\leqq \frac{1}{2}n} \frac{(\nu+n-2m)^2\,\Gamma(\nu+n-m)}{\left(\frac{\nu+n}{2}\right)^{\nu+n-2m+1} m!\, t^{n-2m+1}}. \tag{17}$$

Auch folgern wir mit (15) und (12) sofort

$$\left\{\begin{aligned}\mathfrak{A}_{n,\nu}(t) = {} & (\nu+n)^{1-\nu}(1-t^2)\, A_{n,\nu}((\nu+n)\,t) + \\ & + \cos^2 n\frac{\pi}{2}\cdot 2^{\nu}(\nu+n)^{1-\nu}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}\,t + \\ & + \sin^2 n\frac{\pi}{2}\cdot 2^{\nu+1}(\nu+n)^{-\nu}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{2}\right)}.\end{aligned}\right. \tag{18}$$

Dazu ist nur

$$Ph\left\{(1-z^2)\sum_{n=-m}^{+\infty} a_n z^n\right\} = (1-z^2)\left\{Ph\sum_{n=-m}^{\infty} a_n z^n\right\} + a_{-1}z + a_{-2}$$

zu beachten.

Man hat so, d.h. mit der bisher anscheinend nicht bekannten Darstellung (15), offenbar einen bequemen und natürlichen Zugang zu diesen zuerst von NIELSEN[14]) betrachteten Polynomen[15]).

52. $\nu = 0$, ALS GRENZFALL BETRACHTET.

Fast wörtlich ebenso wie in **42** kann gezeigt werden: Ist $g(z)$ für

$$0 \leqq r_1 < |w(z)| < r_2 \leqq 1$$

eindeutig holomorph, so ist die Reihe

$$z^{\nu} g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{n,\nu} J_{\nu+n}((\nu+n)\,z),$$

$$c_{n,\nu} = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{\pi(\nu+n)}{\sin\pi(\nu+n)} \oint \zeta^{\nu} g(\zeta)\, J_{-\nu-n}((\nu+n)\,\zeta)\,\frac{1-\zeta^2}{\zeta}\,d\zeta$$

auch für $|\nu| = \frac{1}{2}$ absolut gleichmäßig konvergent.

[14]) Ann. sci. de l'École norm. sup. (3) **18**, insbes. S. 60.

[15]) Vgl. l.c. [7]), S. 571f. Man beachte die Druckfehler in S. 571, Formel (3).

Es kann also die Operation

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\nu|=\frac{1}{2}} \cdots \frac{1}{\nu}\, d\nu$$

gliedweise angewandt werden, wobei immer noch absolut gleichmäßige Konvergenz für

$$r_1 < \varrho_1 \leqq |w(z)| \leqq \varrho_2 < r_2$$

erhalten bleibt.

Das Glied mit $n=0$ gibt

$$\frac{1}{2\pi i}\oint g(\zeta)\,\frac{1-\zeta^2}{\zeta}\,d\zeta.$$

Für $n=1, 2, 3, \ldots$ fassen wir wieder die Glieder mit n und $-n$ zusammen und erhalten, wenn wir die Integration über ζ sowie die Faktoren $\frac{1}{2\pi i}\, g(\zeta)\, \frac{1-\zeta^2}{\zeta}$ fortlassen, den Grenzwert von

$$\frac{\pi \zeta^{\nu}(-1)^n}{\sin \pi\nu}\left[(\nu+n)\, J_{-\nu-n}\big((\nu+n)\,\zeta\big)\, J_{\nu+n}\big((\nu+n)\,z\big) + \right.$$
$$\left. + (\nu-n)\, J_{-\nu+n}\big((\nu-n)\,\zeta\big)\, J_{\nu-n}\big((\nu-n)\,z\big)\right]$$

für $\nu \to 0$. Dieser ist

$$2\, J_n(n\zeta)\, J_n(nz) + (-1)^n n \frac{\partial}{\partial \nu}\left[J_{-\nu-n}\big((\nu+n)\,\zeta\big)\, J_{\nu+n}\big((\nu+n)\,z\big) - \right.$$
$$\left. - J_{-\nu+n}\big((\nu-n)\,\zeta\big)\, J_{\nu-n}\big((\nu-n)\,z\big)\right]\Big|_{\nu=0}$$
$$= 2\, J_n(n\zeta)\, J_n(nz) + (-1)^n n \frac{\partial}{\partial \nu}\left[J_{\nu+n}\big((\nu+n)\,z\big)\, J_{-\nu-n}\big((\nu+n)\,\zeta\big) + \right.$$
$$\left. + J_{-\nu-n}\big((\nu+n)\,z\big)\, J_{\nu+n}\big((\nu+n)\,\zeta\big)\right]\Big|_{\nu=0}$$
$$= 2\, J_n(n\zeta)\, J_n(nz) +$$
$$+ J_n(nz)\, 2n\zeta\, J_n'(n\zeta) +$$
$$+ J_n(n\zeta)\, 2nz\, J_n'(nz) +$$
$$+ J_n(nz)\, n \frac{\partial}{\partial \nu}\left[J_{\nu+n}(n\zeta) + (-1)^n J_{-\nu-n}(n\zeta)\right]\Big|_{\nu=0} +$$
$$+ J_n(n\zeta)\, n \frac{\partial}{\partial \nu}\left[J_{\nu+n}(nz) + (-1)^n J_{-\nu-n}(nz)\right]\Big|_{\nu=0}$$
$$= J_n(nz)\left(L_n(n\zeta) + 2n\zeta\, J_n'(n\zeta)\right) +$$
$$+ \left(L_n(nz) + 2nz\, J_n'(nz)\right) J_n(n\zeta).$$

Hier wurde beim Übergang zur zweiten Zeile

$$J_{-\nu+n}\big((\nu-n)\,\zeta\big)\, J_{\nu-n}\big((\nu-n)\,z\big) = J_{-\nu+n}\big((n-\nu)\,\zeta\big)\, J_{\nu-n}\big((n-\nu)\,z\big)$$

beachtet und für die Berechnung von $\frac{\partial}{\partial \nu}\Big|_{\nu=0}$ die Substitution $-\nu$ statt ν vorgenommen.

Wir erhalten nun

SATZ 2. *Es sei gesetzt* $(n=0, 1, 2, \ldots)$

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathfrak{L}_n(z) = J_n(nz) + 2nz\,J_n'(nz) + \\ \qquad + n\,\dfrac{\partial}{\partial \nu}\left[J_{\nu+n}(nz) - (-1)^n J_{\nu-n}(nz)\right]\Big|_{\nu=0}. \end{cases}$$

Dann ist

$$(2)\qquad \mathfrak{L}_n(z) = L_n(nz) + 2nz\,J_n'(nz).$$

Diese Funktionen sind für $0<|z|<\infty$ *eindeutig holomorph; sie haben in* 0 *einen Pol n-ter Ordnung.*

Ist $g(z)$ *für* $0\leqq r_1<|w(z)|<r_2\leqq 1$ *eindeutig holomorph, so ist bei absolut gleichmäßiger Konvergenz in abgeschlossenen Teilmengen eindeutig*

$$g(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n J_n(nz) + c_{-n}\mathfrak{L}_n(z)\right)$$

mit

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint g(\zeta)\,\mathfrak{L}_n(\zeta)\,\frac{1-\zeta^2}{\zeta}\,d\zeta \qquad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint g(\zeta)\,J_n(n\zeta)\,\frac{1-\zeta^2}{\zeta}\,d\zeta \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

entwickelbar. Dementsprechend gelten die Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\oint J_n(nz)\,J_m(mz)\,\dfrac{1-z^2}{z}\,dz = \begin{cases} 1 & (n=m=0) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases} \\ \dfrac{1}{2\pi i}\oint \mathfrak{L}_n(z)\,\mathfrak{L}_m(z)\,\dfrac{1-z^2}{z}\,dz = \begin{cases} 1 & (n=m=0) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases} \\ \dfrac{1}{2\pi i}\oint J_n(nz)\,\mathfrak{L}_m(z)\,\dfrac{1-z^2}{z}\,dz = \delta_{nm} \quad (n, m=0, 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

Ist speziell $g(z)$ *für* $|w(z)|<r_2$ *holomorph, so sind* $c_{-n}=0$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$. *Die Reihe*

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n J_n(nz)$$

ist dann auch um 0 *absolut gleichmäßig konvergent.*

Hierzu ist nur noch zu bemerken, daß der Beweis von (3) — das entspricht der Eindeutigkeit — wie in **42** durch entsprechenden Grenzübergang $\nu\to 0$ erhalten wird. Wir können auf die Durchführung im einzelnen verzichten.

In Analogie zu den Neumannschen Polynomen $O_n(t)$ haben wir hier

$$(4)\qquad \varepsilon_n \mathfrak{O}_n(z) = Ph\left\{\frac{1-z^2}{z}\,\mathfrak{L}_n(z)\right\} \qquad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

zu bilden. Es gilt

SATZ 3. *$\mathfrak{O}_n(z)$ ist ein Polynom $(n+1)$-ten Grades in $1/z$ ohne freies Glied. Es gilt*

$$\mathfrak{O}_0(z) = \frac{1}{z} \tag{5}$$

und für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\mathfrak{O}_n(z) = (-1)^n \frac{n}{2} Ph\left\{\frac{1-z^2}{z} \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{n z}{2}\right)^{\nu} J_{-\nu-n}(n z)\Big|_{\nu=0}\right\} \tag{6}$$

bzw.

$$\mathfrak{O}_n(z) = -\frac{n\pi}{2} Ph\left\{\frac{1-z^2}{z} Y_n(n z)\right\} \tag{7}$$

bzw.

$$\mathfrak{O}_n(z) = n(1-z^2) O_n(n z) + \sin^2 n\frac{\pi}{2} + \cos^2 n\frac{\pi}{2} \cdot z. \tag{8}$$

Man hat die Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \mathfrak{O}_n(z)\, \mathfrak{O}_m(z)\, dz = 0, \tag{9}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint J_n(n z)\, \mathfrak{O}_m(z)\, dz = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_n} & (n=m) \\ 0 & (n \neq m). \end{cases} \tag{10}$$

Für

$$|w(z)| < |w(t)|, \qquad |w(z)| < 1$$

gilt

$$\frac{1}{t-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n\, \mathfrak{O}_n(t)\, J_n(n z). \tag{11}$$

Schließlich ist

$$\varepsilon_n\, \mathfrak{O}_n(z) = \lim_{\nu \to 0} \mathfrak{A}_{n,\nu}(z). \tag{12}$$

(5) bis (7) erhält man wie in **42**. Für (8) verfährt man entsprechend wie für **51**, (18) oder verwendet (12) zusammen mit **42**, (11) und **51**, (18).

(9) ist trivial; (10) folgt aus der dritten Zeile von (3). (11) ergibt sich mit Satz 2 und (4):

$$\frac{1}{t-z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)\, J_n(n z),$$

$$c_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{t-z} \frac{1-z^2}{z} \mathfrak{Q}_n(z)\, dz = \varepsilon_n\, \mathfrak{O}_n(z).$$

(12) ist richtig, weil nach den obigen Überlegungen **51**, (13) für $\nu \to 0$ in (11) übergehen muß.

Die $\mathfrak{O}_n(z)$ sind die Polynome von KAPTEYN[16]), zu denen unsere Theorie wieder einen bequemen Zugang eröffnete.

---

[16]) Vgl. l.c. [7]), S. 568—569.

Wir geben nun eine Herleitung des Kapteynschen Entwicklungssatzes und beweisen

SATZ 4. *$g(z)$ sei in $0 \leqq r_1 < |w(z)| < r_2 \leqq 1$ eindeutig holomorph. Dann läßt sich $g(z)$ eindeutig in eine in abgeschlossenen Teilmengen absolut gleichmäßig konvergente Reihe*

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(nz) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \mathfrak{O}_n(z)$$

entwickeln. Die Koeffizienten sind

$$a_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i} \oint g(z)\, \mathfrak{O}_n(z)\, dz,$$

$$b_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i} \oint g(z)\, J_n(nz)\, dz.$$

Ist $g(z)$ auch um 0 holomorph, so gilt $b_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$; die Reihe

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(nz)$$

ist dann auch um 0 absolut gleichmäßig konvergent. Ist $g(z)$ auch für $|w(z)| > r_1$ holomorph und verschwindet in ∞, so gilt $a_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, die Reihe

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \mathfrak{O}_n(z)$$

ist dann auch um ∞ absolut gleichmäßig konvergent.

Zum Beweise sei $g(z) = g_0(z) + g_\infty(z)$ zerlegt, wo $g_0(z)$ für $|w(z)| < r_2$ und $g_\infty(z)$ für $|w(z)| > r_1$ holomorph sind und $g_\infty(\infty) = 0$ gilt. Es ist für $r_1 < \varrho < r_2$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w(t)|=\varrho} g(t) \frac{1}{t - z}\, dt = g_0(z) \qquad (|w(z)| < \varrho),$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w(t)|=\varrho} g(t) \frac{1}{t - z}\, dt = g_\infty(z) \qquad (|w(z)| > \varrho).$$

Wir entwickeln nun gemäß Satz 2

$$g_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n J_n(nz).$$

Dabei sind

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint g_0(z)\, \mathfrak{L}_n(z)\, \frac{1 - z^2}{z}\, dz$$

$$= \frac{\varepsilon_n}{2\pi i} \oint g_0(z)\, \mathfrak{O}_n(z)\, dz = a_n$$

wegen (4). Weiter entwickeln wir gemäß Satz 2 in $r_1 < |w(z)| < 1$

$$\frac{z}{1 - z^2}\, g_\infty(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n J_n(nz) + c_{-n} \mathfrak{L}_n(z)].$$

Wir multiplizieren mit $\frac{1-z^2}{z}$ und wenden die Operation

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{|w(z)|=\varrho}\frac{\cdots}{z-t}\,dz$$

für $|w(t)|>\varrho$, $r_1<\varrho<1$ an, was wegen gleichmäßiger Konvergenz gliedweise geschehen kann. Indem wir statt t wieder z schreiben, erhalten wir

$$g_\infty(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_{-n}\,Ph\left\{\frac{1-z^2}{z}\,\mathfrak{Q}_n(z)\right\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}c_{-n}\,\varepsilon_n\,\mathfrak{Q}_n(z).$$

Dabei sind

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{z}{1-z^2}\,g_\infty(z)\,\frac{1-z^2}{z}\,J_n(n\,z)\,dz=\frac{b_n}{\varepsilon_n}.$$

Indem wir noch beachten, daß die Eindeutigkeit unserer Entwicklung mit den schon angegebenen Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen äquivalent ist, haben wir so Satz 4 voll bewiesen.

53. Asymptotische Formeln für $n\to+\infty$.

Die Theorie von **31** gab im dort notierten Satz 1 auch eine Formel für die Eigenlösungen bezüglich ihres Verhaltens bei wachsendem Index bzw. im entsprechenden Satz 2 auch eine diesbezügliche asymptotische Reihe. Die Konsequenzen dieser Tatsachen sind für den Spezialfall des Abschnitts **4** weniger interessant. Sie bestätigen in diesem allgemeinen Rahmen nur, daß die z-Potenzreihe für $J_\nu(z)$ zugleich asymptotische Reihe bezüglich ν ist.

Für die hier diskutierten Funktionen $J_\nu(\nu\,z)$ dürfte dagegen die Beachtung der erwähnten Sätze von Interesse sein. Wir beschränken uns hier darauf, die Folgerung der asymptotischen Formel von **31**, Satz 1 zu notieren.

Dazu ist an **51** anzuknüpfen. Für die entsprechenden Eigenlösungen von (4) hat man nach dem erwähnten Satze

$$v_{\nu+n}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{t_0}^{t_0+\pi}v_{\nu+n}(\tau)\,e^{-i(\nu+n)\tau}\,d\tau\cdot e^{i(\nu+n)t}\cdot\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

und zwar in jedem Streifen $0<\varepsilon\leqq\operatorname{Im}t\leqq T<\infty$ gleichmäßig. Die zu Beginn von **51** gegebene Transformation gestattet nun sofort die Umrechnung:

$$(1-z^2)^{\frac{1}{4}}J_{\nu+n}\big((\nu+n)\,z\big)$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\oint(1-\zeta^2)^{\frac{1}{4}}J_{\nu+n}\big((\nu+n)\zeta\big)\,[w(\zeta)]^{-\nu-n}\,\frac{(1-\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}{\zeta}\,d\zeta\,[w(z)]^{\nu+n}\cdot\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Damit gilt gleichmäßig für

$$0<\varrho_1\leqq\left|\frac{z\exp\left((1-z^2)^{\frac{1}{2}}\right)}{1+(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}\right|\leqq\varrho_2<1$$

bei $n\to\pm\infty$

$$J_{\nu+n}\big((\nu+n)\,z\big)=\frac{[(\nu+n)\,z]^{\nu+n}\exp\left[(\nu+n)\,(1-z^2)^{\frac{1}{2}}\right]\cdot\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{e^{\nu+n}\sqrt{\Gamma(\nu+n+1)}\sqrt{\left[1+(1-z^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\nu+n}}\sqrt{(1-z^2)^{\frac{1}{4}}}}.$$

Wie in Abschnitt **42** kann hier Gleichmäßigkeit bezüglich ν in kompakten Mengen, die keine ganze Zahl enthalten, bewiesen werden. So folgt — ähnlich dem Vorgehen in **42** —

$$J_\nu(\nu z) = \frac{(\nu z)^\nu \exp\left[\nu(1-z^2)^{\frac{1}{2}}\right]\left(1+O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right)}{e^\nu \Gamma(\nu+1)\left[1+(1-z^2)^{\frac{1}{2}}\right]^\nu (1-z^2)^{\frac{1}{4}}}$$

zumindest für $\operatorname{Re}\nu \to \pm\infty$ gleichmäßig bezüglich $\operatorname{Im}\nu$ bei $|\operatorname{Im}\nu| \leqq \text{const}$ und gleichmäßig bezüglich obiger z. So erhält man also die asymptotische Formel von CARLINI und MEISSEL[17]).

6. Reihenentwicklungen nach Whittakerschen Funktionen $M_{\varkappa,\nu+n}(z)$, n ganz

Im folgenden sei stets

(1) $$2\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

angenommen. Wir suchen dann Lösungen der Whittakerschen Diffferentialgleichung

(2) $$y''(z) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\varkappa}{z} + \frac{\frac{1}{4}-\lambda}{z^2}\right) y(z) = 0$$

mit der Umlaufseigenschaft

(3) $$y(z\,e^{2\pi i}) = e^{2\pi i(\nu+\frac{1}{2})}\, y(z) \not\equiv 0.$$

Offenbar sind die Eigenwerte genau

(4) $$\lambda = (\nu+n)^2 \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots);$$

die Eigenlösungen sind — bis auf konstanten Faktor bestimmt —

(5) $$y = M_{\varkappa,\nu+n}(z).$$

Dazu bemerken wir, daß (2) mit $\lambda = \mu^2$ bekanntlich die Lösung

(6) $$M_{\varkappa,\mu}(z) = z^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{2}}\, {}_1F_1(\mu - \varkappa + \tfrac{1}{2};\, 2\mu+1;\, z)$$

hat, was natürlich unmittelbar nur für $2\mu+1 \neq 0, -1, -2, \ldots$ sinnvoll ist. Man erkennt speziell

(7) $$M_{\varkappa,\mu}(z) = z^{\mu+\frac{1}{2}}\left(1 + z\,\mathfrak{P}(z)\right),$$

wo $\mathfrak{P}(z)$ eine ganze Funktion von z darstellt.

Die Whittakersche Differentialgleichung (2) geht mit

(8) $$z = e^{it}, \qquad v(t) = z^{-\frac{1}{2}}\, y(z)$$

in die Hillsche Differentialgleichung

(9) $$v''(t) + (\lambda - \varkappa\, e^{it} + \tfrac{1}{4}\, e^{2it})\, v(t) = 0$$

[17]) Vgl. l.c. [7]), S. 7 und 227, bzw. die dort zitierten Originalarbeiten.

über, die die Periode 2π besitzt. (3) entspricht

$$v(t+2\pi) = e^{2\pi i \nu} v(t) \not\equiv 0. \tag{10}$$

Hier ist nun unmittelbar — nur mit der entsprechenden Modifikation bezüglich der Periode — die Theorie von **31** anwendbar. Dazu ist mit

$$v_{\nu-n}(t) = z^{-\frac{1}{2}} M_{\varkappa,\nu+n}(z)$$
$$v^*_{\nu+n}(t) = z^{-\frac{1}{2}} M_{\varkappa,-\nu-n}(z)$$

noch das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v_{\nu+n}(t)\, v^*_{\nu+n}(t)\, dt = \frac{1}{2\pi i}\oint M_{\varkappa,\nu+n}(z)\, M_{\varkappa,-\nu-n}(z)\, \frac{1}{z^2}\, dz = 1$$

zu berechnen, was aus (6) zu ersehen ist.

Damit erhält man

Satz 1. *Sei 2ν nicht ganz. Dann gelten die Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint M_{\varkappa,\nu+n}(z)\, M_{\varkappa,-\nu-m}(z)\, \frac{1}{z^2}\, dz = \delta_{nm}. \tag{11}$$

Jede in einem Kreisring

$$0 \leqq r_1 < |z| < r_2 \leqq \infty$$

holomorphe Funktion $f(z)$ mit der Umlaufseigenschaft

$$f(z\, e^{2\pi i}) = e^{2\pi i(\nu+\frac{1}{2})} f(z)$$

läßt sich eindeutig in eine Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n M_{\varkappa,\nu+n}(z)$$

entwickeln, die in jeder kompakten Teilmenge absolut gleichmäßig konvergiert. Die Koeffizienten sind

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint f(z)\, M_{\varkappa,-\nu-n}(z)\, \frac{1}{z^2}\, dz.$$

Unmittelbar ersichtlich wegen (6) sind folgende

Zusätze:

1. *$f(z)$ ist in der Form $z^{\nu+\frac{1}{2}} g(z)$ darstellbar, wo $g(z)$ im Kreisring eindeutig holomorph ist.*

2. *Ist hier $g(z)$ auch um 0 holomorph, so sind $c_n = 0$ für $n < 0$. Die Reihe*

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-\nu-\frac{1}{2}} M_{\varkappa,\nu+n}(z)$$

ist dann auch um 0 absolut gleichmäßig konvergent.

Satz 1 stellt offenbar eine Verallgemeinerung bzw. Ergänzung eines Satzes von ERDELYI[18]) dar, der nur den Fall des Zusatzes 2 betrifft. Allerdings treten in den Koeffizientenformeln bei ERDELYI andere Funktionen auf, die den Gegenbauerschen Funktionen $A_{n,\nu}(t)$ entsprechen. Während ERDELYI spezielle Entwicklungen, nämlich die der Potenzen bzw. die der Funktion

$$\frac{z^{\nu+\frac{1}{2}}}{t-z},$$

durch Reihenumordnung beweist und damit seinen Satz erhält, können nun ausgehend von Satz 1 offenbar leicht spezielle Entwicklungen hergeleitet werden. Damit wird auch sofort wieder der Zusammenhang zwischen den Koeffizientenformeln von Satz 1 bzw. des Satzes von ERDELYI deutlich werden; ganz genau so wie im Abschnitt **41**, der wie wir bemerken sollten, im wesentlichen den Spezialfall $\varkappa = 0$ behandelt.

Wir entwickeln zunächst

$$z^{\nu+\frac{1}{2}}\, e^{\frac{1}{2}z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, M_{\varkappa,\nu+n}(z).$$

Man hat mit (6) sofort

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint z^{\nu+\frac{1}{2}}\, e^{\frac{1}{2}z}\, M_{\varkappa,-\nu-n}(z)\, \frac{1}{z^2}\, dz \\ &= \frac{(-\nu-n-\varkappa+\frac{1}{2})_n}{(1-2\nu-2n)_n\, n!} \\ &= \frac{(\frac{1}{2}+\nu+\varkappa)_n}{(2\nu+n)_n\, n!}, \end{aligned}$$

also die bekannte Reihe

$$z^{\nu+\frac{1}{2}}\, e^{\frac{1}{2}z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu+\varkappa+\frac{1}{2})_n}{(2\nu+n)_n\, n!}\, M_{\varkappa,\nu+n}(z). \tag{12}$$

ERDELYI leitet aus (12) mittels Reihenumordnung die Entwicklung von $z^{\nu+\frac{1}{2}}$ her. Hier kann dies direkt geschehen.

Dazu berechnen wir zunächst die Potenzreihenentwicklung von $M_{\varkappa,\mu}(z)$: man hat

$$\begin{aligned} & z^{\mu+\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^r \frac{z^r}{r!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\mu-\varkappa+\frac{1}{2})_s}{(2\mu+1)_s\, s!}\, z^s \\ &= z^{\mu+\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{z^n}{n!} \sum_{s=0}^{n} \frac{(-n)_s\, (\mu-\varkappa+\frac{1}{2})_s}{(2\mu+1)_s\, s!}\, 2^s, \end{aligned}$$

also

$$M_{\varkappa,\mu}(z) = z^{\mu+\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n {}_2F_1\left(-n, \mu-\varkappa+\frac{1}{2}; 2\mu+1; 2\right) \frac{z^n}{n!}. \tag{13}$$

Betrachten wir nun

$$z^{\nu+\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, M_{\varkappa,\nu+n}(z),$$

[18]) ERDELYI, A.: Proc. Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam **39**, 1092–1098 (1936); vgl. insbes. Satz II.

so wird

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint z^{\nu+\frac{1}{2}} M_{\varkappa,-\nu-n}(z) \frac{1}{z^2}\, dz$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^n {}_2F_1\left(-n, -\nu-n-\varkappa+\frac{1}{2}; 1-2\nu-2n; 2\right)\frac{1}{n!},$$

nämlich gerade der n-te Koeffizient in (13) für $\mu = -\nu-n$. Damit steht da:

$$(14)\quad \begin{cases} z^{\nu+\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \times \\ \qquad \times {}_2F_1\left(-n, -\nu-n-\varkappa+\frac{1}{2}; 1-2\nu-2n; 2\right) M_{\varkappa,\nu+n}(z). \end{cases}$$

Ebenso kann jetzt direkt[19])

$$(15)\quad \frac{z^{\nu-\frac{1}{2}}}{t-z} = \sum_{n=0}^{\infty} A_{\varkappa,\nu+n,n}(t)\, M_{\varkappa,\nu+n}(z)$$

für $|z| < |t|$ entwickelt werden. Wir erhalten

$$(16)\quad A_{\varkappa,\nu+n,n}(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{z^{\nu-\frac{3}{2}} M_{\varkappa,-\nu-n}(z)}{t-z}\, dz,$$

also

$$(17)\quad A_{\varkappa,\nu+n,n}(t) = Ph\left[t^{\nu-\frac{3}{2}} M_{\varkappa,-\nu-n}(t)\right].$$

Dies ist wieder offenbar unbekannt. Man erkennt sofort, daß es sich um Polynome in $1/t$ vom Grad $n+1$ ohne freies Glied handelt. Auch liest man aus (13) die explizite Darstellung[19])

$$(18)\quad A_{\varkappa,\nu+n,n}(t) = t^{-n-1} \sum_{s=0}^{n} {}_2F_1\left(-s, -\nu-n-\varkappa+\frac{1}{2}; 1-2\nu-2n; 2\right) \frac{\left(-\frac{t}{2}\right)^s}{s!}$$

ab.

Es wäre nun offenbar leichte Rechenarbeit, mit (17) für die Polynome $A_{\varkappa,\nu+n,n}(t)$ Rekursionsformeln, Differentialgleichung oder ähnliches aufzuschreiben, also entsprechende Formeln zu notieren, wie sie für die Polynome $O_n(t)$ von NEUMANN und die Polynome $A_{n,\nu}(t)$ von GEGENBAUER bekannt sind. Man hat eben nur entsprechende Formeln für die $M_{\varkappa,-\nu-n}(t)$ zu benutzen. Da einerseits kein unmittelbares Interesse für derartige Formeln ersichtlich ist, und da andererseits ihre Existenz und qualitative Struktur mit (17) deutlich sind, kann auf die explizite Aufstellung wohl verzichtet werden.

Wir haben dagegen noch zu vermerken, daß für den Fall des Zusatzes 2 von Satz 1 mit (17) offenbar

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint f(z)\, M_{\varkappa,-\nu-n}(z) \frac{1}{z^2}\, dz$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \oint g(z)\, A_{\varkappa,\nu+n,n}(z)\, dz$$

wird. Das ist die Koeffizientenformel von ERDELYI.

[19]) Vgl. l.c. [18]), S. 4.

Auch die weiteren Resultate der Note von ERDELYI können aus unseren Überlegungen schnell entnommen werden. So folgt aus der asymptotischen Aussage von **31**, Satz 1 hier — nach Ergänzung durch Gleichmäßigkeitsbetrachtung bezüglich ν analog zu **42** bzw. **53** —

$$M_{\varkappa,\mu}(z) = z^{\mu+\frac{1}{2}}\left(1+O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right) \tag{19}$$

für $\operatorname{Re}\mu \to \pm\infty$ gleichmäßig bezüglich z in kompakten Mengen ohne 0 und bezüglich $|\operatorname{Im}\mu| \leqq \text{const}$, wenn man nur $|2\mu+n| \geqq \text{const} > 0$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ fordert[20]). Schließlich kann die von ERDELYI angegebene Entwicklung in einem Kreisring nach den Funktionen $z^{-\nu-\frac{1}{2}}M_{\varkappa,\nu+n}(z)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ und den Funktionen $A_{\varkappa,\nu+n,n}(z)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ aus Satz 1 und (17) mit der Methode zum Beweise von **42**, Satz 5 erhalten werden: Man zerlegt

$$g(z) = g_0(z) + g_\infty(z),$$

entwickelt

$$z^{\nu+\frac{1}{2}}g_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n M_{\varkappa,\nu+n}(z),$$

$$z^{-\nu+\frac{1}{2}}g_\infty(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} b_n M_{\varkappa,-\nu-n}(z)$$

und geht bei der zweiten Zeile zu den Polhauptteilen über:

$$g_\infty(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n A_{\varkappa,\nu+n,n}(z).$$

Als Beispiel einer mit unsern Methoden leicht zu gewinnenden neuen Reihenentwicklung betrachten wir

$$z^{\nu-\mu}e^{(1+\alpha)\frac{z}{2}}M_{\varrho,\mu}(\alpha z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n M_{\varkappa,\nu+n}(z).$$

Man rechnet:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi i}\oint z^{\nu-\mu-2}e^{(1+\alpha)\frac{z}{2}}M_{\varrho,\mu}(\alpha z)\,M_{\varkappa,\nu+n}(z)\,dz \\ &= \frac{\alpha^{\mu+\frac{1}{2}}}{2\pi i}\oint z^{-n-1}F\left(\mu-\varrho+\frac{1}{2};\ 2\mu+1;\ \alpha z\right)\times \\ &\quad \times F\left(-\nu-n-\varkappa+\frac{1}{2};\ 1-2\nu-2n;\ z\right)dz \\ &= \alpha^{\mu+\frac{1}{2}}\sum_{r=0}^{n}\frac{(\mu-\varrho+\frac{1}{2})_r(-\nu-n-\varkappa+\frac{1}{2})_{n-r}\alpha^r}{(2\mu+1)_r(1-2\nu-2n)_{n-r}(n-r)!\,r!} \\ &= \frac{\alpha^{\mu+\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}+\nu+\varkappa)_n}{n!\,(2\nu+n)_n}\,{}_3F_2\left(-n,\ 2\nu+n,\ \mu-\varrho+\frac{1}{2};\ 2\mu+1,\ \nu+\varkappa+\frac{1}{2};\ -\alpha\right), \end{aligned}$$

wobei

$$(1-\sigma-n)_{n-r} = (-1)^{n-r}\frac{(\sigma)_n}{(\sigma)_r}$$

[20]) Vgl. l.c. [18]), § 3.

benutzt wurde. So haben wir also

$$(20)\quad \begin{cases} z^{\nu-\mu}\, e^{(1+\alpha)\frac{z}{2}}\, M_{\varrho,\mu}(\alpha z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{\mu+\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}+\nu+\varkappa)_n}{n!\,(2\nu+n)_n} \times \\ \times\, {}_3F_2\Big(-n,\, 2\nu+n,\, \mu-\varrho+\frac{1}{2};\, 2\mu+1,\, \nu+\varkappa+\frac{1}{2};\, -\alpha\Big)\, M_{\varkappa,\nu+n}(z). \end{cases}$$

Hierin sind natürlich interessante Spezialfälle enthalten, so etwa $\mu=\nu$, $\varrho=-\varkappa$, wo

$${}_3F_2(\ldots) = {}_2F_1(-n,\, 2\nu+n;\, 2\nu+1;\, -\alpha)$$

wird, oder $\varrho=0$ (eventuell mit $\alpha=-1$), oder $\varkappa=0$ (eventuell mit $\alpha=-1$).

Zum Schluß sei darauf hingewiesen, daß es interessant wäre, $2\nu=$ ganze Zahl als Grenzfall analog dem Vorgehen in **42** bzw. **52** zu diskutieren. Das sei jedoch einer späteren Note vorbehalten.

7. Reihenentwicklungen nach Kugelfunktionen

71. Eigenlösungen und Transformation der Legendreschen Differentialgleichung.

711. Sei $\nu+\frac{1}{2}$ keine ganze Zahl. Wir suchen Lösungen der Legendreschen Differentialgleichung

$$(1)\qquad [(1-z^2)\, y'(z)]' + [\lambda - \mu^2(1-z^2)^{-1}]\, y(z) = 0$$

mit der Umlaufseigenschaft (um die Strecke $[-1, 1]$)

$$(2)\qquad y(z\, e^{\pi i}) = e^{-\pi i(\nu+1)}\, y(z) \not\equiv 0.$$

Die Eigenwerte sind

$$\lambda = (\nu+2n)(\nu+2n+1) \qquad (n \text{ ganz}),$$

die Eigenlösungen (bis auf konstanten Faktor)

$$y(z) = \tilde{\mathfrak{Q}}^{\mu}_{\nu+2n}(z).$$

Dazu sei an[21])

$$(3)\quad \begin{cases} \tilde{\mathfrak{Q}}^{\mu}_{\nu}(z) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu+2}\,\Gamma(\nu+\frac{3}{2})}\,(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}\, z^{-\nu-\mu-1} \times \\ \qquad \times\, {}_2F_1\Big(\dfrac{\nu+\mu+1}{2},\, \dfrac{\nu+\mu+2}{2};\, \nu+\dfrac{3}{2};\, z^{-2}\Big) \end{cases}$$

erinnert. Es ist

$$(4)\qquad \mathfrak{Q}^{\mu}_{\nu}(z) = e^{i\mu\pi}\,\Gamma(\nu+\mu+1)\,\tilde{\mathfrak{Q}}^{\mu}_{\nu}(z).$$

$\tilde{\mathfrak{Q}}^{\mu}_{\nu}(z)$ ist im Gegensatz zu $\mathfrak{Q}^{\mu}_{\nu}(z)$ eine ganze Funktion von ν und μ. Man hat

$$(5)\qquad \tilde{\mathfrak{Q}}^{-\mu}_{\nu}(z) = \tilde{\mathfrak{Q}}^{\mu}_{\nu}(z).$$

Zu denselben Eigenwerten sind

$$y(z) = \tilde{\mathfrak{Q}}^{\mu}_{-\nu-2n-1}(z)$$

[21]) Vgl. MS. S. 252f. (vgl. Anm.[1]) Math. Z., Bd. 74, S. 436 im I. Teil).

Eigenlösungen für die Umlaufseigenschaft

$$y(z\,e^{\pi i}) = e^{\pi i \nu}\, y(z) \not\equiv 0.$$

Nach Voraussetzung ist $\nu \neq -\nu - 1 + 2k$, k ganz, also

$$e^{\pi i \nu} \neq e^{-\pi i (\nu+1)}.$$

Um mit Hilfe der Theorie von **31** einen Entwicklungssatz zu erhalten, soll (1) auf eine Hillsche Differentialgleichung transformiert werden.

Wir rechnen — im Hinblick auf eine weitere Anwendung — allgemeiner

$$[(1-z^2)\,y'(z)]' + [\nu(\nu+1) - \mu^2(1-z^2)^{-1}]\,y(z) = 0 \tag{6}$$

mit

$$\frac{dt}{dz} = b(z), \qquad y(z) = a(z)\,v(t) \tag{7}$$

um und notieren mit $\cdot$ die Ableitung nach t. Es entsteht

$$\begin{cases} (1-z^2)\,b^2\,a\,\ddot{v} + \{[(1-z^2)\,a\,b]' + (1-z^2)\,a'\,b\}\dot{v} + \\ \qquad + \{[(1-z^2)\,a']' + [\nu(\nu+1) - \mu^2(1-z^2)^{-1}]\,a\}\,v = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Für den oben genannten Zweck erhält man mit

$$b(z) = (1-z^2)^{-\frac{1}{2}}, \qquad a(z) = (1-z^2)^{-\frac{1}{4}} \tag{9}$$

die Differentialgleichung

$$\ddot{v} + \{(\nu+\tfrac{1}{2})^2 - (\mu^2 - \tfrac{1}{4})\,(1-z^2)^{-1}\}\,v = 0. \tag{10}$$

Indem wir genauer

$$t = \frac{\pi}{2} - \int_0^z (1-\zeta^2)^{-\frac{1}{2}}\,d\zeta = \arccos z,$$

$$z = \cos t, \qquad 1 - z^2 = \sin^2 t$$

setzen und bei $\zeta = 0$ vom Hauptwert ausgehen, bilden wir die Halbebene

$$\operatorname{Im} t < 0$$

eineindeutig auf die unendlich oft überlagerte z-Ebene ohne den Schnitt $-1 \leqq z \leqq 1$ ab. Dabei entspricht

$$z \to z\,e^{\pi i}$$

offenbar

$$t \to t + \pi;$$

dies z.B. wegen

$$\oint \frac{-i}{z}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dz = 2\pi.$$

(10) ist damit Hillsche Differentialgleichung.

712. Sei jetzt μ nicht ganz. Wir suchen Lösungen der Legendreschen Differentialgleichung

$$[(1-z^2)\,y'(z)]' + [\nu(\nu+1) - \lambda(1-z^2)^{-1}]\,y(z) = 0 \tag{11}$$

mit der Umlaufseigenschaft (um $z=1$)

$$y\left(1+(z-1)\,e^{2\pi i}\right) = e^{\pi i\mu}\,y(z) \not\equiv 0. \tag{12}$$

Die Eigenwerte sind

$$\lambda = (\mu+2n)^2 \qquad (n \text{ ganz}),$$

die Eigenlösungen (bis auf konstanten Faktor)

$$y(z) = \mathfrak{P}_\nu^{-\mu-2n}(z).$$

Wir erinnern dazu an

$$\mathfrak{P}_\nu^{-\mu}(z) = \frac{1}{\Gamma(1+\mu)}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{\mu}{2}} {}_2F_1\left(-\nu, \nu+1; 1+\mu; \frac{1-z}{2}\right) = \mathfrak{P}_{-\nu-1}^{-\mu}(z). \tag{13}$$

Zu denselben Eigenwerten sind

$$y(z) = \mathfrak{P}_\nu^{\mu+2n}(z)$$

Eigenlösungen für die Umlaufseigenschaft

$$y\left(1+(z-1)\,e^{2\pi i}\right) = e^{-\pi i\mu}\,y(z) \not\equiv 0.$$

Um auch hier einen Entwicklungssatz zu erhalten, wird wieder auf eine entsprechende Hillsche Differentialgleichung transformiert. Wir können an (6), (7), (8) anschließen. Man wird hier

$$b(z) = -i(z^2-1)^{-1}, \qquad a(z) = 1 \tag{14}$$

wählen und

$$\ddot{v} + \{\mu^2 - \nu(\nu+1)\,(1-z^2)\}\,v = 0 \tag{15}$$

erhalten. Genauer wird man mit

$$t = -i\int_{\infty e^{i0}}^{z} (\zeta^2-1)^{-1}\,d\zeta = \frac{1}{2i}\log\frac{z-1}{z+1} \tag{16}$$

die Halbebene $\operatorname{Im} t>0$ auf die in $z=1$ punktierte unendlich oft überdeckte Halbebene $\operatorname{Re} z>0$ abbilden. Dabei entspricht einmaliger positiver Umlauf um $z=1$ gerade $t\to t+\pi$. (15) ist damit Hillsche Differentialgleichung.

72. Reihenentwicklungen nach den Funktionen $\tilde{\Omega}_{\nu+n}^{\mu}(z)$ (n ganz).

Wir können nun gemäß **711** die Theorie von **31** auf die Legendresche Differentialgleichung anwenden. Es ist bequem die Resultate für ν und für $\nu+1$ anstatt ν gemeinsam zu formulieren, da man dann nur ganze Umläufe um die Strecke $[-1, 1]$ zu notieren braucht.

Da man mit (3) und (5) die Normierungsintegrale leicht hinschreiben kann, erhält man so den

SATZ 1. *Sei $\nu+\frac{1}{2}$ nicht ganz. Dann gilt für ganze n, m*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \tilde{\Omega}^{\mu}_{\nu+n}(z)\,\tilde{\Omega}^{\mu}_{-\nu-m-1}(z)\,dz=\frac{\cos\pi(\nu+n)}{2(\nu+n)+1}\,\delta_{nm}.$$

Jede in einem konfokalen Ellipsenring mit den Brennpunkten $+1$, -1, d.h. für

$$1\leqq r_1<\left|z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\right|<r_2\leqq\infty$$

holomorphe Funktion $f(z)$ mit der Umlaufseigenschaft

$$f(z\,e^{2\pi i})=e^{-2\pi i\nu}f(z)$$

läßt sich eindeutig in eine Reihe

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\,\tilde{\Omega}^{\mu}_{\nu+n}(z)$$

entwickeln, die in jedem kompakten Teilgebiet absolut gleichmäßig konvergiert. Es gilt

$$c_n=\frac{2(\nu+n)+1}{\cos\pi(\nu+n)\cdot 2\pi i}\oint f(z)\,\tilde{\Omega}^{\mu}_{-\nu-n-1}(z)\,dz.$$

ZUSÄTZE. 1. *Gilt*

$$f(z\,e^{\pi i})\equiv e^{-\pi i(\nu+1)}f(z),$$

so ist

$$c_n=0,\qquad (n\ \textit{ungerade});$$

gilt dagegen

$$f(z\,e^{\pi i})\equiv e^{-\pi i\nu}f(z),$$

so ist

$$c_n=0\qquad (n\ \textit{gerade}).$$

2. *Gilt*

$$r_2=\infty,$$

$$f(z)=z^{-\nu-1}g(z),$$

und ist $g(z)$ in ∞ holomorph, so sind

$$c_n=0\qquad (n<0).$$

Die Zusätze sind mit der Koeffizientendarstellung auf Grund von (3) leicht zu verifizieren.

Von besonderem Interesse ist der Fall $\nu=\mu$, wobei wir $\mu+\frac{1}{2}$ als nicht ganz voraussetzen. Hier wird für

$$r=-1,-2,-3,\ldots$$

die Funktion

$$\tilde{\Omega}^{\mu}_{\mu+r}(z)=(z^2-1)^{-\frac{\mu}{2}}F_{-\mu,-r-1}(z),$$

wo

$$F_{\mu,-r-1}(z)$$

ein Polynom in z vom genauen Grad $-r-1$ ist; ebenso wird — das ist wegen (5) nur eine andere Schreibweise derselben Tatsache — für

$$r = 0, 1, 2, \ldots$$

die Funktion

$$\widetilde{\Omega}^{\mu}_{-\mu-r-1}(z) = (z^2-1)^{\frac{\mu}{2}} F_{\mu,r}(z).$$

Das zeigt (3).

Damit läßt sich aus Satz 1 folgern:

Satz 2. *Sei $\mu+\frac{1}{2}$ nicht ganz. Dann läßt sich jede im Innern einer Ellipse mit den Brennpunkten $+1$, -1 holomorphe Funktion $g(z)$ in eine Reihe*

$$g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m F_{\mu\, m}(z)$$

entwickeln, die in jedem abgeschlossenen Teilgebiet absolut gleichmäßig konvergiert. Die Koeffizienten sind

$$d_m = \frac{2(\mu+m)+1}{\cos\pi(\mu+m)\cdot 2\pi i} \oint (z^2-1)^{\frac{\mu}{2}} g(z)\, \widetilde{\Omega}^{\mu}_{\mu+m}(z)\, dz.$$

Zum Beweise wird man

$$(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}} g(z) = f(z)$$

setzen und Satz 1 anwenden. Mit

$$m = -n-1, \qquad c_n = d_m$$

entsteht dann

$$(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}} g(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d_m \widetilde{\Omega}^{\mu}_{-\mu-m-1}(z).$$

Dabei sind aber für $m = -1, -2, -3, \ldots$

$$d_m = \frac{2(\mu+m)+1}{\cos\pi(\mu+m)\cdot 2\pi i} \oint g(z)\, F_{-\mu,-m-1}(z)\, dz = 0.$$

Daß sich die Konvergenzeigenschaften von einem Ellipsenring auf das ganze Innere übertragen, ist klar, da es sich um dort holomorphe Funktionen handelt.

Die Polynome $F_{\mu,r}(z)$ sind im wesentlichen die Gegenbauerschen Polynome. Man hat nämlich [22])

$$\widetilde{\Omega}^{\mu}_{-\mu-r-1}(z) = \cos(\mu+r)\pi \cdot \Gamma(2\mu+r+1)\, \mathfrak{P}^{-\mu}_{\mu+r}(z) \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots)$$

und [23])

$$C^{\mu+\frac{1}{2}}_{r}(z) = \frac{2^{\mu}\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(2\mu+1)\, r!}\, \Gamma(2\mu+r+1)\, (z^2-1)^{-\frac{\mu}{2}}\, \mathfrak{P}^{-\mu}_{\mu+r}(z).$$

Danach ist

$$F_{\mu,r}(z) = \frac{2^{\mu}}{\sqrt{\pi}}\, \Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right) \cos(\mu+r)\pi \cdot r!\quad C^{\mu+\frac{1}{2}}_{r}(z),$$

---

[22]) Vgl. MS, S. 258.

[23]) Vgl. Erdelyi, Magnus, Oberhettinger, Tricomi: Higher transcendental functions, I, S. 175, Formel (4).

wenn man nach dem Multiplikationssatz von LEGENDRE

$$\frac{\Gamma(2\mu+1)}{2^\mu\Gamma(\mu+1)}=\frac{2^\mu}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)$$

umrechnet. Entwicklung und Koeffizientenformel von Satz 2 schreibt man damit zu

$$g(z)=\sum_{m=0}^{\infty}k_m C_m^{\mu+\frac{1}{2}}(z), \tag{17}$$

$$k_m=\frac{2^\mu}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\frac{2(\mu+m)+1}{2\pi i}m!\oint(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}g(z)\,\tilde{\Omega}_{\mu+m}^{\mu}(z)\,dz \tag{18}$$

um. Ohne Durchführung des Beweises (analog zu Überlegungen in **4** sei bemerkt, daß der Entwicklungssatz in dieser Form auch für $\mu+\frac{1}{2}=1, 2, 3, \ldots$ gültig bleibt. (Für $\mu+\frac{1}{2}=0, -1, -2, \ldots$ ist kein Resultat zu erwarten, da dann nur endlich viele Gegenbauersche Polynome vorhanden sind[24]).)

Wir bemerken noch, daß für $\mu=0$

$$C_m^{\frac{1}{2}}(z)=P_m(z),$$

Legendresches Polynom, wird; dann ist mit (4)

$$k_m=\frac{2m+1}{2\pi i}\oint g(z)\,\Omega_m(z)\,dz.$$

Im folgenden seien nur einige wenige Beispiele von Reihenentwicklungen notiert. Zunächst betrachten wir

$$g(z)=\frac{1}{t-z}$$

für $|z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}|<|t+(t^2-1)^{\frac{1}{2}}|$ und wenden Satz 2 an. Man hat

$$d_m(t)=\frac{2(\mu+m)+1}{\cos(\mu+m)\pi}\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{1}{t-z}(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}\tilde{\Omega}_{\mu+m}^{\mu}(z)\,dz.$$

Nun ist

$$z(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}\tilde{\Omega}_{\mu+m}^{\mu}(z)$$

für $m=0, 1, 2, \ldots$ nach (3), (5) in ∞ regulär. Daher wird

$$d_m(t)=\frac{2(\mu+m)+1}{\cos\pi(\mu+m)}(t^2-1)^{\frac{\mu}{2}}\tilde{\Omega}_{\mu+m}^{\mu}(t).$$

So ist bewiesen[24a])

$$\frac{(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}(t^2-1)^{-\frac{\mu}{2}}}{t-z}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2(\mu+m)+1}{\cos\pi(\mu+m)}\tilde{\Omega}_{-\mu-m-1}^{\mu}(z)\,\tilde{\Omega}_{\mu+m}^{\mu}(t) \tag{19}$$

[24]) Vgl. l.c. [23]), S. 175, Formel (1).

[24a]) Vgl. T. MACROBERT: Phil. Mag. (7) **35**, 670–680 (1944).

bzw.

$$(20)\qquad \frac{(t^2-1)^{-\frac{\mu}{2}}}{t-z}=\frac{2^\mu}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\sum_{m=0}^{\infty}[2(\mu+m)+1]\,m!\;C_m^{\mu+\frac{1}{2}}(z)\,\widetilde{\mathfrak{Q}}_{\mu+m}^{\mu}(t)$$

und insbesondere für $\mu=0$

$$(21)\qquad \frac{1}{t-z}=\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)\,P_m(z)\,\mathfrak{Q}_m(t).$$

(21) ist die Entwicklung von HEINE[25]). Von ihr ausgehend hat C. NEUMANN[26]) den Spezialfall $\mu=0$ von Satz 2 entwickelt, sowie auch den Spezialfall $\nu=\mu=0$ von Satz 1.

Wir betrachten nunmehr die Entwicklung gemäß Satz 1

$$(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}z^{-\nu-\mu-1}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,\widetilde{\mathfrak{Q}}_{\nu+n}^{\mu}(z)$$

mit

$$c_n=\frac{2(\nu+n)+1}{\cos\pi(\nu+n)}\,\frac{1}{2\pi i}\oint(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}z^{-\nu-\mu-1}\,\widetilde{\mathfrak{Q}}_{-\nu-n-1}^{\mu}(z)\,dz.$$

Man wird mit (3), (5)

$$\widetilde{\mathfrak{Q}}_{-\nu-n-1}^{\mu}(z)=\frac{\sqrt{\pi}\,(z^2-1)^{-\frac{\mu}{2}}z^{\nu+\mu+n}}{2^{-\nu-n}\,\Gamma(-\nu-n+\frac{1}{2})}\times$$
$$\times\,{}_2F_1\left(\frac{-\nu-n-\mu+1}{2},\frac{-\nu-\mu-n}{2};-\nu-n+\frac{1}{2};z^{-2}\right)$$

benutzen. Dann erhält man aus den Koeffizienten der hier auftretenden hypergeometrischen Reihe sofort die gesuchten c_n. Es ergibt sich

$$(22)\qquad \begin{cases}(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}z^{-\nu-\mu-1}\\ \qquad=\dfrac{\sqrt{\pi}\,2^\nu}{\cos\pi\nu}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\nu+4k+1}{\Gamma(-\nu-k+\frac{1}{2})}\,\frac{\Gamma(-\nu-\mu)}{\Gamma(-\nu-\mu-2k)}\,\frac{1}{k!}\,\widetilde{\mathfrak{Q}}_{\nu+2k}^{\mu}(z).\end{cases}$$

In ähnlicher Weise kann die Entwicklung von

$$(z^2-1)^{\frac{\mu-1}{2}}\,[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]^{-\nu-\mu}$$

gewonnen werden. Man substituiert in

$$c_n=\frac{2(\nu+n)+1}{\cos\pi(\nu+n)}\,\frac{1}{2\pi i}\oint(z^2-1)^{\frac{\mu-1}{2}}\,[z+(z^2-1)]^{-\nu-\mu}\,\widetilde{\mathfrak{Q}}_{-\nu-n-1}^{\mu}(z)\,dz$$

einmal

$$[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]=\zeta,\qquad dz=(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\,[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]^{-1}\,d\zeta,$$

[25]) HEINE, E.: Crelle's J. **42**, 72 (1851).

[26]) Über die Entwicklung einer Funktion nach Kugelfunktionen. Halle 1862.

dann[27])

$$\widetilde{\mathfrak{Q}}^{\mu}_{-\nu-n-1}(z) = \frac{e^{\mu\pi i}}{\Gamma(-\nu-n-\mu)}\,\mathfrak{Q}^{-\mu}_{-\nu-n-1}(z)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\,2^{-\mu}}{\Gamma(-\nu-n+\frac{1}{2})}\,(z^2-1)^{-\frac{\mu}{2}}\zeta^{\nu+n+\mu}\,{}_2F_1\Big(\frac{1}{2}-\mu, -\nu-n-\mu; -\nu-n+\frac{1}{2}; \zeta^{-2}\Big).$$

Damit ergibt sich

$$(23)\quad \begin{cases} (z^2-1)^{\frac{\mu-1}{2}}\,[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]^{-\nu-\mu} \\ = \dfrac{\sqrt{\pi}\,2^{-\mu}}{\cos\pi\nu}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\nu+4k+1}{\Gamma(-\nu-k+\frac{1}{2})}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu+k)\,\Gamma(-\nu-k-\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu)\,\Gamma(-\nu-2k-\mu)}\,\frac{1}{k!}\,\widetilde{\mathfrak{Q}}^{\mu}_{\nu+2k}(z). \end{cases}$$

73. REIHENENTWICKLUNGEN NACH DEN FUNKTIONEN $\mathfrak{P}_{\nu}^{-(\mu+2n)}(z)$ (n GANZ).

Wir wenden nunmehr die Theorie von **31** auf die gemäß **712** umgerechnete Legendresche Differentialgleichung an. Hier wird man die Abkürzung — vgl. (16) —

$$(24)\qquad u = e^{2it} = \frac{z-1}{z+1}$$

verwenden. Für eine in $\operatorname{Im} t>0$ holomorphe π-periodische Funktion $F(t)$ ist dann

$$G(u) = F(t)$$

in $0<|u|<1$ eindeutig holomorph und umgekehrt. Dabei ist

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} F(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\oint G(u)\,u^{-1}\,du.$$

Wir benötigen nun das Normierungsintegral — nach (13) —:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \mathfrak{P}_{\nu}^{-\mu}(z)\,\mathfrak{P}_{\nu}^{\mu}(z)\,u^{-1}\,du = \frac{1}{\Gamma(1+\mu)\,\Gamma(1-\mu)} = \frac{\sin\pi\mu}{\pi\mu}.$$

Damit kann formuliert werden:

SATZ 3. *Sei μ nicht ganz. Dann gilt für ganze n, m*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \mathfrak{P}_{\nu}^{-\mu-2n}(z)\,\mathfrak{P}_{\nu}^{\mu+2m}(z)\,u^{-1}\,du = \frac{\sin\pi\mu}{\pi(\mu+2n)}\,\delta_{nm}, \qquad u=\frac{z-1}{z+1}.$$

Jede in einem Ringgebiet

$$0 \leqq r_1 < \left|\frac{z-1}{z+1}\right| < r_2 \leqq 1$$

holomorphe Funktion $f(z)$ mit der Umlaufseigenschaft

$$f\big(1+(z-1)\,e^{2\pi i}\big) = e^{\pi i\mu} f(z)$$

[27]) Vgl. l.c. [23]), S. 136/137, Formel (45).

läßt sich dort eindeutig in eine Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathfrak{P}_\nu^{-\mu-2n}(z)$$

entwickeln, die in jedem kompakten Teilgebiet absolut gleichmäßig konvergiert. Die Koeffizienten sind

$$c_n = \frac{\pi(\mu+2n)}{\sin \pi\mu} \frac{1}{2\pi i} \oint f(z)\, \mathfrak{P}_\nu^{\mu+2n}(z)\, u^{-1}\, du.$$

Zusatz. *Ist*

$$f(z) = (z-1)^{\frac{\mu}{2}} g(z)$$

und $g(z)$ um $z=1$ holomorph, so gilt

$$c_n = 0 \qquad (n<0).$$

Die Reihe

$$g(z) - \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-1)^{-\frac{\mu}{2}} \mathfrak{P}_\nu^{-\mu-2n}(z)$$

ist dann auch um $z=1$ absolut gleichmäßig konvergent.

Als erste Anwendung entwickeln wir

$$f(z) = \frac{2^\nu (z+1)^{-\nu} u^{\frac{\mu}{2}}}{v-u}$$

mit

$$u = \frac{z-1}{z+1}$$

für

$$|u| < \min(1, |v|).$$

Wir erhalten

$$c_n = \frac{\pi(\mu+2n)}{\sin \pi\mu} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{2^\nu (z+1)^{-\nu} u^{\frac{\mu}{2}}}{v-u} \mathfrak{P}_\nu^{\mu+2n}(z)\, u^{-1}\, du.$$

Man wird nun [28])

$$\mathfrak{P}_\nu^{\mu+2n}(z) = \frac{2^{-\nu}(z+1)^\nu}{\Gamma(1-\mu-2n)} u^{-\frac{\mu}{2}-n} {}_2F_1(-\nu, -\nu-\mu-2n; 1-\mu-2n; u)$$

einsetzen. Dann wird

$$c_n = \Gamma(1+\mu+2n) \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{u^{-n-1}}{v-u} {}_2F_1(.,.;.;u)\, du,$$

also für $n=0, 1, 2, \ldots$ (vgl. den Zusatz zu Satz 3)

$$c_n = \Gamma(1+\mu+2n)\, Ph\, v^{-n-1} {}_2F_1(-\nu, -\nu-\mu-2n; 1-\mu-2n; v)$$
$$= B_{\nu,n}^{\mu}(v).$$

[28]) Vgl. l.c. [23]), S. 124, 125, Formel (16).

Dabei bedeutet Ph den Polhauptteil bei $v=0$. Damit ist $B^{\mu}_{\nu,n}(v)$ ein mit v^{-1} multipliziertes Polynom vom Grad n in v^{-1}. Wir notieren

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{2^{\nu}(z+1)^{-\nu-\frac{\mu}{2}}(z-1)^{\frac{\mu}{2}}}{v-\frac{z-1}{z+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}B^{\mu}_{\nu,n}(v)\,\mathfrak{P}_{\nu}^{-\mu-2n}(z),\\&\qquad\left(\left|\frac{z-1}{z+1}\right|<\min\left(1,|v|\right)\right),\end{aligned}\right. \tag{25}$$

$$B^{\mu}_{\nu,n}(v)=\Gamma(1+\mu+2n)\,Ph\,v^{-n-1}\,{}_2F_1(-\nu,-\nu-\mu-2n;1-\mu-2n;v). \tag{26}$$

Ein weiteres Beispiel ist die Entwicklung von

$$f(z)=2^{\nu}(z+1)^{-\nu}u^{\frac{\mu}{2}},$$

wo man analog zu eben

$$\begin{aligned}c_n&=\Gamma(1+\mu+2n)\,\frac{1}{2\pi i}\oint u^{-n-1}\,{}_2F_1(-\nu,-\nu-\mu-2n;1-\mu-2n;u)\,du\\&=\frac{\Gamma(1+\mu+2n)}{\Gamma(1-\mu-n)}\,\frac{\Gamma(1-\mu-2n)}{n!}\,\frac{\Gamma(-\nu+n)}{\Gamma(-\nu)}\,\frac{\Gamma(-\nu-\mu-n)}{\Gamma(-\nu-\mu-2n)}\end{aligned}$$

erhält. Damit gilt für $\operatorname{Re} z>0$

$$\left\{\begin{aligned}&2^{\nu}(z+1)^{-\nu-\frac{\mu}{2}}(z-1)^{\frac{\mu}{2}}\\&=\frac{\pi}{\sin\pi\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mu+2n}{\Gamma(1-\mu-n)}\,\frac{\Gamma(-\nu+n)}{\Gamma(-\nu)}\,\frac{\Gamma(-\nu-\mu-n)}{\Gamma(-\nu-\mu-2n)}\,\frac{1}{n!}\,\mathfrak{P}_{\nu}^{-\mu-2n}(z).\end{aligned}\right. \tag{27}$$

Auch die Entwicklung

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{\mu}{2}}}{t-z}=\sum_{n=0}^{\infty}D^{\mu}_{\nu,n}(t)\,\mathfrak{P}_{\nu}^{-\mu-2n}(z),\\&\qquad\left(\left|\frac{z-1}{z+1}\right|<\min\left(1,\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\right),\end{aligned}\right. \tag{28}$$

kann angegeben werden. Man berechnet

$$\begin{aligned}D^{\mu}_{\nu,n}(t)&=\frac{\pi(\mu+2n)}{\sin\pi\mu}\,\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{1}{t-z}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{\mu}{2}}\mathfrak{P}_{\nu}^{\mu+2n}(z)\,\frac{2}{z^2-1}\,dz\\&=\frac{\pi(\mu+2n)}{\sin\pi\mu}\,Ph\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^{\frac{\mu}{2}}\mathfrak{P}_{\nu}^{\mu+2n}(t)\,\frac{2}{t^2-1},\end{aligned}$$

wo Ph den Polhauptteil um $t=1$ bezeichnet. So hat man

$$\left\{\begin{aligned}&D^{\mu}_{\nu,n}(t)=\Gamma(1+\mu+2n)\,Ph\,\frac{2}{t^2-1}\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^{-n}\times\\&\qquad\times\,{}_2F_1\left(-\nu,\nu+1;1-\mu-2n;\frac{1-t}{2}\right).\end{aligned}\right. \tag{29}$$

Dies ist wieder ein mit $(t-1)^{\frac{1}{2}}$ multipliziertes Polynom vom Grade n in $(t-1)^{-1}$.

74. Asymptotische Formeln.

Zum Schluß sei der Vollständigkeit halber notiert, daß mit **31** die bekannten asymptotischen Formeln

$$(30)\qquad \tilde{\mathfrak{Q}}^{\mu}_{\nu+2n}(z)=\left|\frac{\pi}{2}\right|^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\Gamma(\nu+2n+\frac{3}{2})}(z^2-1)^{-\frac{1}{4}}\left(z-(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\right)^{\nu+2n+\frac{1}{2}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

— gleichmäßig bezüglich z in kompakten Gebieten ohne $-1\leq z\leqq 1$ — und

$$(31)\qquad \mathfrak{P}^{-\mu-2n}_{\nu}(z)=\frac{1}{\Gamma(1+\mu+2n)}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{\mu}{2}+n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

— gleichmäßig in kompakten Teilgebieten von

$$0<\left|\frac{z-1}{z+1}\right|<1$$

— erhalten werden können. Wie in **42** können (30) und (31) erweitert werden, indem man Gleichmäßigkeit bezüglich ν bzw. μ in kompakten Gebieten ohne halbzahlige ν bzw. ganzzahlige μ beweist.

Institut für Angewandte Mathematik der Universität Köln

(Eingegangen am 29. Februar 1960)

MEULENBELD, B.
Math. Zeitschr. 75, 192—200 (1961)

The generalized Legendre functions with special relations between the parameters

By
B. MEULENBELD

1. Introduction

In the present note we derive properties of the generalized Legendre functions $P_k^{m,n}(z)$ and $Q_k^{m,n}(z)$, introduced by KUIPERS and the author in [1], for special values of the parameters k, m and n. On the crosscut we restrict $z=x$ to lie in the interval $-1<x<1$, and we define:

$$(1)\quad \begin{cases} P_k^{m,n}(x)=\frac{1}{2}\{e^{\frac{1}{2}\pi i m}P_k^{m,n}(x+0\,i)+e^{-\frac{1}{2}\pi i m}P_k^{m,n}(x-0\,i)\} \\ Q_k^{m,n}(x)=\frac{1}{2}e^{-\pi i m}\{e^{-\frac{1}{2}\pi i m}Q_k^{m,n}(x+0\,i)+e^{\frac{1}{2}\pi i m}Q_k^{m,n}(x-0i)\}, \end{cases}$$

where $f(x\pm 0i)$ means $\lim_{\varepsilon\to 0} f(x\pm i\varepsilon)$, $\varepsilon>0$.

It is wellknown that the associated Legendre functions $R_k^m(z)$ (R denotes both P and Q) satisfy the differential equation:

$$(2)\qquad R_k^m(z)=(z^2-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^m R_k(z)}{dz^m}\ (m \text{ is an integer } \geqq 0),$$

valid over the whole plane of z with the crosscut, and which gives the connection between $R_k^m(z)$ and $R_k(z)$.

In section 2 we shall give an extension of (2), representing a similar relation between $R_k^{m,n}(z)$ and $R_k^{\frac{1}{2}(m+n)}(z)$.

In section 3 we shall show that $R_k^{m,n}(z)$ with $k=\pm\frac{1}{2}(m\pm n)$ can be expressed in terms of incomplete betafunctions.

In [5], 76 ROBIN proved that $R_k(x)$ $(-1<x<1)$ with k half an odd integer can be expressed in terms of the elliptic integrals

$$E(s)=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(1-s^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}\,d\varphi \quad \text{and} \quad K(s)=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(1-s^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\,d\varphi.$$

In section 4 we prove that this is also true for $R_k^m(x)$ (k is half an odd integer and m is an integer). For the sake of brevity we put

$$\alpha=k+\tfrac{1}{2}(m+n),\quad \beta=k-\tfrac{1}{2}(m-n),\quad \gamma=k+\tfrac{1}{2}(m-n),\quad \delta=k-\tfrac{1}{2}(m+n).$$

In section 5 we consider $R_k^{m,n}(z)$, in which one of the four numbers $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ is integral.

Finally in section 6 we derive extensions of CHRISTOFFEL'S summation-formula.

2. Extension of formula (1)

In [6], (5) has been shown that if $\frac{1}{2}(n-m)$ is a positive integer or 0, we have

$$(3)\qquad P_k^{m,n}(z) = \frac{(z+1)^{\frac{1}{2}n}\,\Gamma(\gamma+1)\,2^{\frac{1}{2}(n-m)}}{(z-1)^{\frac{1}{2}m}\,\Gamma(\beta+1)}\left(\frac{d}{dz}\right)^{\frac{1}{2}(n-m)}\left\{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{4}(m+n)} P_k^{\frac{1}{2}(m+n)}(z)\right\}.$$

Starting from the expansion (see [2], (8))

$$Q_k^{m,n}(z) = \frac{e^{\pi i m}\,2^{-m+n-1}\,\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\gamma+1)\,\Gamma(-m)\,(z+1)^{-\frac{1}{2}n}\,(z-1)^{\frac{1}{2}m}}{\Gamma(\beta+1)\,\Gamma(\delta+1)} \times$$
$$\times F\{-\beta, \gamma+1; 1+m; \tfrac{1}{2}(1-z)\}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\,e^{\pi i m}\,\Gamma(m)\,(z+1)^{\frac{1}{2}n}\,(z-1)^{-\frac{1}{2}m} F\{-\gamma, \beta+1; 1-m; \tfrac{1}{2}(1-z)\},$$

and employing the relations (see [9], 2.8):

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-n)}\, z^{c-1-n}(1-z)^{a+b-c-n} F\{a-n, b-n; c-n; z\}$$
$$= \left(\frac{d}{dz}\right)^n \left\{z^{c-1}(1-z)^{a+b-c} F\{a, b; c, ; z\}\right\}$$

and

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n F\{a, b; c; z\} = \frac{\Gamma(a+n)\,\Gamma(b+n)\,\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c+n)}\, F\{a+n, b+n; c+n; z\},$$

it is easily found that $Q_k^{m,n}(z)$ also satisfies (3), so that we have:

$$R_k^{m,n}(z) = \frac{(z-1)^{\frac{1}{2}n}\,\Gamma(\gamma+1)\,2^{\frac{1}{2}(n-m)}}{(z-1)^{\frac{1}{2}m}\,\Gamma(\beta+1)}\left(\frac{d}{dz}\right)^{\frac{1}{2}(n-m)}\left\{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{4}(m+n)} R_k^{\frac{1}{2}(m+n)}(z)\right\}$$

$[\frac{1}{2}(n-m)$ is an integer $\geqq 0]$.

Employing the definitions (1) of the functions for $z = x = \cos\vartheta$ $(0<\vartheta<\pi)$ we deduce

$$R_k^{m,n}(\cos\vartheta) = \frac{2^{n-m}\cos^n\frac{1}{2}\vartheta\,\Gamma(\gamma+1)}{\sin^m\frac{1}{2}\vartheta\,\Gamma(\beta+1)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{\frac{1}{2}(n-m)}\left\{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{4}(m+n)} R_k^{\frac{1}{2}(m+n)}\right\}.$$

3. $R_k^{m,n}(z)$ for $k = \pm\frac{1}{2}(m \pm n)$

a) For $|1-z|<2$, z not lying on the crosscut, we have:

$$P^{m,n}_{\frac{1}{2}(m+n)} = \frac{1}{\Gamma(1-m)}\,\frac{(z+1)^{\frac{1}{2}n}}{(z-1)^{\frac{1}{2}m}}\, F\left\{-m, n+1; 1-m; \frac{1}{2}(1-z)\right\}.$$

This series may be summed up by means of the formula

$$(4)\qquad B_z(a,b) = a^{-1} z^a F\{a, 1-b; a+1; z\},$$

valid for $\operatorname{Re} a>0$ (see [9], (2.5.3)), and where $B_z(a,b)$ represents the incomplete betafunction:

$$B_z(a,b) = \int_0^z t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt.$$

Thus we find for $\operatorname{Re} m<0$:

$$P^{m,n}_{\frac{1}{2}(m+n)} = \frac{(z+1)^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(1-m)\,(z-1)^{\frac{1}{2}m}}\,(-m)\left(\frac{1-z}{2}\right)^m B_{\frac{1}{2}(1-z)}(-m, -n)$$
$$= \frac{e^{\mp\pi i m}\,2^{-m}}{\Gamma(-m)}\,(z-1)^{\frac{1}{2}m}\,(z+1)^{\frac{1}{2}n}\,B_{\frac{1}{2}(1-z)}(-m, -n),$$

the upper or lower sign being taken in the exponential, according as $\mathrm{Im}(z)$ is positive or negative.

In a similar way we find for $\mathrm{Re}\, m < 0$:

$$(5) \qquad P^{m,n}_{\frac{1}{2}(m+n)}(z) = \frac{2^{-m}}{\Gamma(-m)}(z-1)^{\frac{1}{2}m}(z+1)^{\frac{1}{2}n} B_{\frac{z-1}{z+1}}(-m, m+n+1).$$

For $\mathrm{Re}\, m \geqq 0$ we transform (5):

$$B_{\frac{z-1}{z+1}}(-m, m+n+1) = B_1(m+n+1, -m) - B_{\frac{2}{z+1}}(m+n+1, -m),$$

where the second term is meaningful for $\mathrm{Re}(m+n) > -1$.

Since

$$B_1(m+n+1, -m) = \frac{\Gamma(m+n-1)\,\Gamma(-m)}{\Gamma(n+1)},$$

it follows

$$P^{m,n}_{\frac{1}{2}(m+n)}(z) = (z-1)^{\frac{1}{2}m}(z+1)^{\frac{1}{2}n} 2^{-m} \times \times \left\{ \frac{\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(n+1)} - \frac{1}{\Gamma(-m)} B_{\frac{2}{z+1}}(m+n+1, -m) \right\}.$$

These formulas hold good in the whole plane of z with the crosscut by analytical continuation.

For $z = x = \cos\vartheta\ (0 < \vartheta < \pi)$ we obtain if $\mathrm{Re}\, m < 0$:

$$P^{m,n}_{\frac{1}{2}(m+n)}(\cos\vartheta) = \frac{2^{\frac{1}{2}(n-m)} \cos^n \frac{1}{2}\vartheta \sin^m \frac{1}{2}\vartheta}{\Gamma(-m)} B_{\sin^2 \frac{1}{2}\vartheta}(-m, -n).$$

For $\mathrm{Re}\, m \geqq 0$ we may use the analytical continuation of the function $B_z(a, b)$. Applying the formula:

$$B_z(a, b) = \Gamma(a)\,\Gamma(b) \left\{ \sum_{q=0}^{p-1} \frac{z^{a+q}(1-z)^{b-q-1}}{\Gamma(a+q+1)\,\Gamma(b-q)} + \frac{B_z(a+p, b-p)}{\Gamma(a+p)\Gamma(b-p)} \right\}$$

we find, if $p - 1 \leqq \mathrm{Re}(m) < p$, p a positive integer:

$$P^{m,n}_{\frac{1}{2}(m+n)}(\cos\vartheta) = 2^{\frac{1}{2}(n-m)}\,\Gamma(-n) \cos^n \frac{1}{2}\vartheta \sin^m \frac{1}{2}\vartheta \times \times \left\{ \sum_{q=0}^{p-1} \frac{(\sin\frac{1}{2}\vartheta)^{-2(m+q)} (\cos\frac{1}{2}\vartheta)^{-2(n+q+1)}}{\Gamma(-m+q+1)\,\Gamma(-n-q)} + \frac{B_{\sin^2 \frac{1}{2}\vartheta}(-m+p, -n-p)}{\Gamma(-m+p)\,\Gamma(-n-p)} \right\}.$$

From [2] (8) we have for $|1-z| < 2$:

$$Q^{m,n}_{\frac{1}{2}(m+n)}(z) = \frac{e^{\pi i m} 2^{-m+n-1}\,\Gamma(m+n+1)\,\Gamma(m+1)\,\Gamma(-m)\,(z+1)^{-\frac{1}{2}n}(z-1)^{\frac{1}{2}m}}{\Gamma(n+1)} \times \times F\left\{-n, m+1; m+1; \frac{1}{2}(1-z)\right\} + + \frac{1}{2} e^{\pi i m}\,\Gamma(m)\,(z+1)^{\frac{1}{2}n}(z-1)^{-\frac{1}{2}m} F\left\{-m, n+1; 1-m; \frac{1}{2}(1-z)\right\}.$$

Because of

$$F\{-a, b; b; -z\} = (1+z)^a$$

we obtain:

$$F\{-n, m+1; m+1; \tfrac{1}{2}(1-z)\} = (z+1)^n 2^{-n}.$$

Furthermore from (4) for $\operatorname{Re} m<0$:

$$F\{-m, n+1; 1-m; \tfrac{1}{2}(1-z)\} = -m\, e^{\mp \pi i m} 2^{-m} (z-1)^m B_{\frac{1}{2}(1-z)}(-m, -n),$$

so that for $\operatorname{Re} m<0$ and z not lying on the crosscut we have:

$$Q^{m,n}_{\frac{1}{2}(m+n)}(z) = \frac{e^{\pi i m} 2^{-m-1}\pi}{\sin m\pi} (z+1)^{\frac{1}{2}n} (z-1)^{\frac{1}{2}m} \times$$
$$\times \left\{ -\frac{\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(n+1)} + \frac{e^{\mp \pi i m}}{\Gamma(-m)} B_{\frac{1}{2}(1-z)}(-m, -n) \right\}$$

and

$$Q^{m,n}_{\frac{1}{2}(m+n)}(z) = \frac{e^{\pi i m} 2^{-m-1}\pi}{\sin m\pi} (z+1)^{\frac{1}{2}n} (z-1)^{\frac{1}{2}m} \times$$
$$\times \left\{ -\frac{\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(n+1)} + \frac{1}{\Gamma(-m)} B_{\frac{z-1}{z+1}}(-m, m+n+1) \right\}.$$

For $\operatorname{Re}(m+n) > -1$ we have:

$$Q^{m,n}_{\frac{1}{2}(m+n)}(z) = e^{\pi i m} 2^{-m-1} \Gamma(m+1) (z+1)^{\frac{1}{2}n} (z-1)^{\frac{1}{2}m} B_{\frac{2}{z+1}}(m+n+1, -m).$$

For $z=x=\cos\vartheta$ $(0<\vartheta<\pi)$ we obtain if $\operatorname{Re}(m+n)>-1$:

$$Q^{m,n}_{\frac{1}{2}(m+n)}(\cos\vartheta) = 2^{\frac{1}{2}(n-m)-1} \Gamma(m+1) \cos^n \tfrac{1}{2}\vartheta \sin^m \tfrac{1}{2}\vartheta\, B_{\frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}\vartheta}}(m+n+1, -m).$$

b) For $|1-z|<2$, z not lying on the crosscut, we have:

$$P^{m,n}_{-\frac{1}{2}(m+n)}(z) = \frac{(z+1)^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(1-m)(z-1)^{\frac{1}{2}m}} F\left\{1-m, n; 1-m; \frac{1}{2}(1-z)\right\}$$
$$= \frac{2^n}{\Gamma(1-m)} (z+1)^{-\frac{1}{2}n} (z-1)^{-\frac{1}{2}m},$$

and for $z=\cos\vartheta$ $(0<\vartheta<\pi)$:

$$P^{m,n}_{-\frac{1}{2}(m+n)}(\cos\vartheta) = \frac{2^{\frac{1}{2}(n-m)} \cos^{-n}\tfrac{1}{2}\vartheta \sin^{-m}\tfrac{1}{2}\vartheta}{\Gamma(1-m)}.$$

For $|1+z|<2$, z not lying on the crosscut we have (see [2], (9)):

$$Q^{m,n}_{-\frac{1}{2}(m+n)}(z) = \frac{e^{\pi i m} 2^{-m} \Gamma(1-n) (z+1)^{m+\frac{1}{2}n-1} (z-1)^{-\frac{1}{2}m}}{\Gamma(-m-n+2)} \times$$
$$\times F\left\{-m-n+1, 1-m; -m-n+2; \frac{2}{1+z}\right\}.$$

Hence if $\operatorname{Re}(m+n)<1$:

$$Q^{m,n}_{-\frac{1}{2}(m+n)}(z) = \frac{e^{\pi i m} 2^{n-1} \Gamma(1-n)}{\Gamma(-m-n+1)} (z+1)^{-\frac{1}{2}n} (z-1)^{-\frac{1}{2}m} B_{\frac{2}{z+1}}(-m-n+1, m),$$

and if $\operatorname{Re} m>0$:

$$Q^{m,n}_{-\frac{1}{2}(m+n)}(z) = e^{\pi i m} 2^{n-1} (z+1)^{-\frac{1}{2}n} (z-1)^{-\frac{1}{2}m} \times$$
$$\times \left\{ \Gamma(m) - \frac{\Gamma(1-n)}{\Gamma(-m-n+1)} B_{\frac{z-1}{z+1}}(m, -m-n+1) \right\}.$$

For $z=\cos\vartheta$ $(0<\vartheta<\pi)$ we obtain if $\mathrm{Re}(m+n)<1$:

$$Q^{m,n}_{-\frac{1}{2}(m+n)}(\cos\vartheta)=\frac{2^{\frac{1}{2}(n-m)-1}\Gamma(1-n)\cos m\pi}{\Gamma(-m-n+1)}\times$$
$$\times\cos^{-n}\frac{1}{2}\vartheta\sin^{-m}\frac{1}{2}\vartheta\,B_{\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\vartheta}}(-m-n+1,m).$$

c) The expressions for $R^{m,n}_{+\frac{1}{2}(m-n)}(z)$ are easily found by changing n into $-n$ in the results of a and b, and using the formulas:

$$R^{m,-n}_{k}(z)=2^{-n}R^{m,n}_{k}(z). \tag{6}$$

4. $R^{m}_{k}(\cos\vartheta)$ if k is half an odd integer and m is an integer

a) In [7] (3) the following recurrence relation is deduced:

$$\begin{cases}\gamma P^{m,n+1}_{k-\frac{1}{2}}(z)-(z+1)^{-\frac{1}{2}}\{(2k+1)z+2k-2n+1\}\times\\ \qquad\times P^{m,n}_{k}(z)+2(\delta+1)P^{m,n-1}_{k+\frac{1}{2}}(z)=0,\end{cases} \tag{7}$$

valid in the whole z plane including the crosscut $(-1<z<1)$. Now we have for $0<\vartheta<\pi$:

$$P^{0,-1}_{-1}(\cos\vartheta)=P^{0,-1}_{0}(\cos\vartheta)=\frac{2^{-\frac{1}{2}}}{\cos\frac{1}{2}\vartheta}F\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;\sin^2\frac{1}{2}\vartheta\right\}$$
$$=\frac{2^{\frac{1}{2}}}{\pi\cos\frac{1}{2}\vartheta}E\left(\sin\frac{1}{2}\vartheta\right),$$
$$P^{0,0}_{-\frac{1}{2}}(\cos\vartheta)=P_{\frac{1}{2}}(\cos\vartheta)=F\left\{\frac{3}{2},-\frac{1}{2};1;\sin^2\frac{1}{2}\vartheta\right\}$$
$$=\frac{2}{\pi}\left\{2E\left(\sin\frac{1}{2}\vartheta\right)-K\left(\sin\frac{1}{2}\vartheta\right)\right\}.$$

From (7) we find for instance:

$$P^{0,-2}_{-\frac{1}{2}}(\cos\vartheta)=\frac{1}{2}P^{0,0}_{-\frac{1}{2}}(\cos\vartheta)+\frac{2^{\frac{1}{2}}\sin^2\frac{1}{2}\vartheta}{\cos\frac{1}{2}\vartheta}P^{0,-1}_{-1}(\cos\vartheta)$$
$$=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{E(\sin\frac{1}{2}\vartheta)}{\cos^2\frac{1}{2}\vartheta}-\frac{1}{2}K\left(\sin\frac{1}{2}\vartheta\right)\right\}.$$

Continuing this process it is clear that if p is an integer the function $P^{0,-p-2}_{\frac{1}{2}(p-1)}(\cos\vartheta)$ can be expressed in terms of E and K functions (for abbrevation we say: $P^{0,-p-2}_{\frac{1}{2}(p-1)}(\cos\vartheta)$ is an E, K function). Applying the recurrence relation [7] (9a):

$$\begin{cases}\delta(-\beta\cos\vartheta+\alpha+m+2)P^{m,n}_{k}(\cos\vartheta)+4\sin^2\frac{1}{2}\vartheta\,P^{m+2,n}_{k}(\cos\vartheta)-\\ \qquad-(m+1)\gamma\,2^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}\vartheta\,P^{m,n+1}_{k-\frac{1}{2}}(\cos\vartheta)=0\end{cases} \tag{8}$$

with $m=0$, we can express $P^{2,-p-2}_{\frac{1}{2}(p-1)}(\cos\vartheta)$ in terms of $P^{0,-p-2}_{\frac{1}{2}(p-1)}(\cos\vartheta)$ and $P^{0,-p-1}_{\frac{1}{2}(p-2)}(\cos\vartheta)$, so that $P^{2,-p-2}_{\frac{1}{2}(p-1)}(\cos\vartheta)$ is an E, K function. From the recurrence relation [7], 4a:

$$\begin{cases}m\left\{(m^2-1)\frac{3+\cos\vartheta}{1-\cos\vartheta}-(2k+1)^2+n^2\right\}P^{m,n}_{k}(\cos\vartheta)\\ \quad=(m+1)\alpha(\beta+1)\gamma(\delta+1)P^{m-2,n}_{k}(\cos\vartheta)+4(m-1)P^{m+2,n}_{k}(\cos\vartheta)=0\end{cases} \tag{9}$$

it follows that for integral p and q the function $P^{2q,-p-2}_{\frac{1}{2}(p-1)}(\cos\vartheta)$ is an E, K function.

In particular, if p is an even integer $-2q-2$ the assertion above holds good for the associated Legendre function $P^{-p-2}_{\frac{1}{2}(p-1)}(\cos\vartheta)$, and thus if $p=-4$ for $P^2_{-\frac{3}{2}}(\cos\vartheta)$. ROBIN [5], p. 177 proved that $P^0_{-\frac{3}{2}}(\cos\vartheta)$ is an E, K function, so that applying the recurrence relations:

$$P_k^{m+1}(\cos\vartheta)+2m\operatorname{cotg}\vartheta\,P_k^m(\cos\vartheta)+(k+m)(k-m+1)\,P_k^{m-1}(\cos\vartheta)=0$$

and

$$(k+m)\sin\vartheta\,P_k^{m-1}(\cos\vartheta)-\cos\vartheta\,P_k^m(\cos\vartheta)+P_{k+1}^m(\cos\vartheta)=0$$

successively, we find that for integral m $P^m_{-\frac{1}{2}}(\cos\vartheta)$, $P^m_{-\frac{3}{2}}(\cos\vartheta)$ and generally $P_k^m(\cos\vartheta)$ (k half an odd integer) is an E, K function.

b) On emplying the relation [8] (11):

$$Q_k^{n,m}(-\cos\vartheta)=-\frac{2^{m-n}\,\Gamma(\beta-1)}{\Gamma(\gamma-1)}\left\{\cos\alpha\pi\,Q_k^{m,n}(\cos\vartheta)+\frac{1}{2}\pi\sin\alpha\pi\,P_k^{m,n}(\cos\vartheta)\right\}$$

we deduce for integral p and q:

$$(10)\quad Q^{-p-2,2q}_{\frac{1}{2}(p-1)}(\cos\vartheta)=\frac{(-1)^{q+1}\,\pi\,2^{2q+p+1}\,\Gamma(-\frac{1}{2}-q)}{\Gamma(p+q+\frac{3}{2})}\,P^{2q,-p-2}_{\frac{1}{2}(p-1)}(-\cos\vartheta).$$

Now we have

$$Q_{-1}^{-1,0}(\cos\vartheta)=2\pi\,P_{-1}^{0,-1}(-\cos\vartheta)=\frac{2^{\frac{3}{2}}}{\sin\frac{1}{2}\vartheta}\,E\left(\cos\frac{1}{2}\vartheta\right),$$

$$Q^{0,0}_{-\frac{3}{2}}(\cos\vartheta)=-2E(\cos\tfrac{1}{2}\vartheta)+K(\cos\tfrac{1}{2}\vartheta).$$

From (7) we derive the recurrence relation:

$$\left(p+q+\frac{1}{2}\right)P^{2q,-p-1}_{\frac{1}{2}(p-2)}(\cos\vartheta)-\frac{2^{-\frac{1}{2}}}{\cos\frac{1}{2}\vartheta}\,(p\cos\vartheta+3p+4)\,P^{2q,-p-2}_{\frac{1}{2}(p-1)}(\cos\vartheta)+$$

$$+2\left(p-q+\frac{3}{2}\right)P^{2q,-p-3}_{\frac{1}{2}p}(\cos\vartheta)=0,$$

therefore from (10):

$$Q^{-p-1,2q}_{\frac{1}{2}(p-2)}(\cos\vartheta)-\frac{2^{-\frac{3}{2}}}{\sin\frac{1}{2}\vartheta}\,(-p\cos\vartheta+3p+4)\,Q^{-p-2,2q}_{\frac{1}{2}(p-1)}(\cos\vartheta)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(p-q+\frac{3}{2}\right)\left(p+q+\frac{3}{2}\right)Q^{-p-3,2q}_{\frac{1}{2}p}(\cos\vartheta)=0.$$

We find for instance if $p=0$, $q=0$:

$$Q^{-2,0}_{-\frac{1}{2}}(\cos\vartheta)=16\left\{\frac{E(\cos\frac{1}{2}\vartheta)}{\sin^2\frac{1}{2}\vartheta}-\frac{1}{2}\,K\left(\cos\frac{1}{2}\vartheta\right)\right\}.$$

With the aid of (10) it is possible to transform the relations (8) and (9) in recurrence relations between the special Q functions, so that, following the same argument as in *a*, $Q^{-p-2,2q}_{\frac{1}{2}(p-1)}(\cos\vartheta)$ is an E, K function, and further that for m is an integer and k is half an odd integer $Q_k^m(\cos\vartheta)$ is an E, K function.

5. $R_k^{m,n}(z)$ with one of the four numbers α, δ, γ, β integral

a) *α is a non-negative integer.*

We interchange the parameters and consider the function $P_\alpha^{-m,-n}(z)$ where k is an integer $\geqq 0$. In this case we have for $|1-z|<2$:

$$(11)\quad \begin{cases} P_\alpha^{-m,-n}(z) = \dfrac{1}{\Gamma(1+m)}(z+1)^{-\frac{1}{2}n}(z-1)^{\frac{1}{2}m}\times \\ \qquad\qquad \times F\left\{k+m+1,\,-k-n;\,1+m;\,\dfrac{1}{2}(1-z)\right\} \\ \qquad\quad = \dfrac{2^{-n}}{\Gamma(1+m)}(z+1)^{\frac{1}{2}n}(z-1)^{\frac{1}{2}m}\times \\ \qquad\qquad \times F\left\{-k,\,k+m+n+1;\,1+m;\,\dfrac{1}{2}(1-z)\right\}. \end{cases}$$

Hence the function $(z+1)^{-\frac{1}{2}n}(z-1)^{-\frac{1}{2}m}P_\alpha^{-m,-n}(z)$ is a polynomial in z of the degree k.

On the crosscut $(0<\vartheta<\pi)$ we have:

$$P_\alpha^{-m,-n}(\cos\vartheta) = \frac{2^{\frac{1}{2}(m-n)}\sin^m\frac{1}{2}\vartheta\cos^n\frac{1}{2}\vartheta}{\Gamma(1+m)}F\left\{-k,\,k+m+n+1;\,1+m;\,\sin^2\frac{1}{2}\vartheta\right\}.$$

This polynomial is related to the Jacobi polynomial $P_k^{(m,n)}(\cos\vartheta)$. According to [*10*], p. 170 (16) we have:

$$P_\alpha^{-m,-n}(\cos\vartheta) = \frac{2^{\frac{1}{2}(m-n)}\Gamma(k+1)\sin^m\frac{1}{2}\vartheta\cos^n\frac{1}{2}\vartheta}{\Gamma(k+m+1)}P_k^{(m,n)}(\cos\vartheta).$$

For $|1+z|<2$ we find from [*3*] (21) and (11) or from [*2*], (2):

$$P_\alpha^{-m,-n}(z) = \frac{(-1)^k\Gamma(k+n+1)\,2^{-n}}{\Gamma(k+m+1)\,\Gamma(n+1)}(z+1)^{\frac{1}{2}n}(z-1)^{\frac{1}{2}m}\times$$
$$\times F\left\{-k,\,k+m+n+1;\,1+n;\,\frac{1}{2}(1+z)\right\},$$

and on the crosscut:

$$P_\alpha^{-m,-n}(\cos\vartheta) = \frac{(-1)^k\Gamma(k+n+1)\,2^{\frac{1}{2}(m-n)}}{\Gamma(k+m+1)\,\Gamma(n+1)}\cos^n\frac{1}{2}\vartheta\sin^m\frac{1}{2}\vartheta\times$$
$$\times F\left\{-k,\,k+m+n+1;\,1+n;\,\cos^2\frac{1}{2}\vartheta\right\}.$$

From [*2*], (7) we have for $|1-z|>2$:

$$Q_\alpha^{-m,-n}(z) = \frac{e^{-\pi i m}\,2^{k+m}\,\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+n+1)}{\Gamma(2k+m+n+2)}(z+1)^{-\frac{1}{2}n}(z-1)^{-k-\frac{1}{2}m-1}\times$$
$$\times F\left\{k+1,\,k+m+1;\,2k+m+n+2,\,\frac{2}{1-z}\right\},$$

which may be written as

$$Q_\alpha^{-m,-n}(z) = \frac{e^{-\pi i m}\,2^{-n}\,\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+m+1)}(z+1)^{\frac{1}{2}n}(z-1)^{\frac{1}{2}m}\,Q_k^{(m,n)}(z),$$

where $Q_\alpha^{(m,n)}$ denotes the Jacobi function of the second kind. Using the definition of $Q_k^{(m,n)}(x)$ on the crosscut:

$$Q_k^{(m,n)}(x) = \tfrac{1}{2}\{Q_k^{(m,n)}(x+0\,i) + Q_k^{(m,n)}(x-0\,i)\}$$

we find for $x=\cos\vartheta$ $(0<\vartheta<\pi)$:

$$Q_\alpha^{m,n}(\cos\vartheta)=\frac{2^{\frac{1}{2}(m-n)}\Gamma(k+m+n+1)\sin^m\frac{1}{2}\vartheta\cos^n\frac{1}{2}\vartheta}{\Gamma(k+n+1)}\,Q_k^{(m,n)}(\cos\vartheta).$$

b) *δ is a negative integer.*

This case may be reduced to that of α, on account of

$$P_k^{m,n}(z)=P_{-k-1}^{m,n}(z),$$

and

$$\sin\alpha\pi\sin\gamma\pi\,Q_k^{m,n}(z)=\tfrac{1}{2}\pi\,e^{\pi i m}\sin 2k\pi\,P_k^{m,n}(z).$$

c) *γ is a non-negative integer.*

We interchange the parameters and consider the function $P_\beta^{m,n}(z)$ where k is an integer $\geqq 0$. If we replace m by $-m$ and apply formula (6), we may reduce this case to that of *a*.

d) *β is a non-negative integer.*

In the same way as the results in *b* follow from those in *a*, the results in *d* may be deduced from those in *c*.

REMARK. Further relations between the generalized Legendre associated functions and the Jacobi polynomials and Jacobi functions are given by KUIPERS and ROBIN in [*4*].

6. Extension of CHRISTOFFEL'S summationformula

From [*11*], (16) with $(-m,-n)$ in stead of (m,n) we have

$$\{2k(k+1)(2k+1)z_1+\tfrac{1}{2}(m^2-n^2)(2k+1)\}P_k^{-m,-n}(z_1)$$
$$=2k(\gamma+1)(\alpha+1)P_{k+1}^{-m,-n}(z_1)+2(k+1)\beta\delta P_{k-1}^{-m,-n}(z_1),$$

$$\{2k(k+1)(2k+1)z_2+\tfrac{1}{2}(m^2-n^2)(2k+1)\}P_k^{-m,-n}(z_2)$$
$$=2k(\gamma+1)(\alpha+1)P_{k+1}^{-m,-n}(z_2)+2(k+1)\beta\delta P_{k-1}^{-m,-n}(z_2).$$

Hence if $k\neq 0$:

$$(k+1)(2k+1)(z_1-z_2)P_k^{-m,-n}(z_1)P_k^{-m,-n}(z_2)$$
$$=(\gamma+1)(\alpha+1)\,\Delta P_k^{-m,-n}(z_1,z_2)-\frac{k+1}{k}\beta\delta\,\Delta P_{k-1}^{-m,-n}(z_1,z_2),$$

where

$$\Delta P_k^{-m,-n}(z_1,z_2)=P_{k+1}^{-m,-n}(z_1)P_k^{-m,-n}(z_2)-P_k^{-m,-n}(z_1)P_{k+1}^{-m,-n}(z_2).$$

Thus

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\delta+1)}(2k+1)(z_1-z_2)P_k^{-m,-n}(z_1)P_k^{-m,-n}(z_2)$$
$$=\frac{\Gamma(\gamma+2)\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\delta+1)(k+1)}\Delta P_k^{-m,-n}(z_1,z_2)-\frac{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\delta)k}\Delta P_{k-1}^{-m,-n}(z_1,z_2).$$

Hence by giving k the values: $\frac{1}{2}(m+n)$, $\frac{1}{2}(m+n)+1, \ldots, \frac{1}{2}(m+n)+p$, ($p$ a non-negative integer) and summing we have:

$$(z_1 - z_2) \sum_{k=\frac{1}{2}(m+n)}^{\frac{1}{2}(m+n)+p} \frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\beta+1)\,\Gamma(\delta+1)} (2k+1)\, P_k^{-m,\,-n}(z_1)\, P_k^{-m,\,-n}(z_2)$$
$$= \frac{\Gamma(m+p+2)\,\Gamma(m+n+p+2)}{\{\frac{1}{2}(m+n)+p+1\}\,\Gamma(n+p+1)\,\Gamma(p+1)} \Delta^{-m,\,-n}_{\frac{1}{2}(m+n)+p}(z_1, z_2),$$

or, changing the notation:

$$(12)\quad \begin{cases} (z_1 - z_2) \sum_{k=0}^{p} \frac{\Gamma(k+m+n+1)\,\Gamma(k+m+1)}{\Gamma(k+n+1)\,\Gamma(k+1)} (2k+m+n+1)\, P_\alpha^{-m,\,-n}(z_1) \times \\ \quad \times P_\alpha^{-m,\,-n}(z_2) = \frac{\Gamma(m+p+2)\,\Gamma(m+n+p+2)}{\{\frac{1}{2}(m+n)+p+1\}\,\Gamma(n+p+1)\,\Gamma(p+1)} \Delta^{-m,\,-n}_{\frac{1}{2}(m+n)+p}(z_1, z_2). \end{cases}$$

This formula holds good for every z_1 and z_2 provided that m and n are not negative integers.

If in (12) we change m into $-m$, we have, employing (6):

$$(13)\quad \begin{cases} (z_1 - z_2) \sum_{k=0}^{p} \frac{\Gamma(k-m+n+1)\,\Gamma(k-m+1)}{\Gamma(k+n+1)\,\Gamma(k+1)} (2k-m+n+1)\, P_\beta^{m,\,n}(z_1) \times \\ \quad \times P_\beta^{m,\,n}(z_2) = \frac{\Gamma(-m+p+2)\,\Gamma(-m+n+p+2)}{\{-\frac{1}{2}(m-n)+p+1\}\,\Gamma(n+p+1)\,\Gamma(p+1)} \Delta^{m,\,n}_{-\frac{1}{2}(m-n)+p}(z_1, z_2). \end{cases}$$

(12) and (13) are generalizations of CHRISTOFFEL's first summation-formula.

References

[1] KUIPERS, L., and B. MEULENBELD: On a generalization of Legendre's associated differential equation I, II. Proc. Kon. Ned. Ak. v. Wet., Amsterdam, Ser. A **60**, 436—450 (1957).

[2] KUIPERS, L., and B. MEULENBELD: Linear transformations of generalized Legendre's associated functions. Proc. Kon. Ned. Ak. v. Wet., Amsterdam, Ser. A **61**, 330—333 (1958).

[3] KUIPERS, L., and B. MEULENBELD: Related generalized Legendre's associated functions. Arch. Math. **9**, 394—400 (1958).

[4] KUIPERS, L., and L. ROBIN: Resumé de quelques propriétés des fonctions de Legendre généralisées. Proc. Kon. Ned. Ak. v. Wet., Amsterdam, Ser. A **62**, 502—507 (1959).

[5] ROBIN, L.: Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroidales, Tome II. Paris 1958.

[6] MEULENBELD, B.: Quadratic transformations of generalized Legendre's associated functions. Arch. rational Mech. Anal. **3**, 460—471 (1959).

[7] MEULENBELD, B.: New recurrence formulas for the $P_k^{m,n}(z)$ and $Q_k^{m,n}(z)$. Monatshefte f. Math. **4**, 355—360 (1960).

[8] MEULENBELD, B.: Generalized Legendre's associated functions for real values of the argument nummerically less than unity. Proc. Kon. Ned. Ak. v. Wet., Amsterdam, Ser. A **61**, 557—563 (1958).

[9] ERDÉLYI, A.: Higher transcendental functions I. New York-Toronto-London 1953.

[10] ERDÉLYI, A.: Higher transcendental functions II. New York-Toronto-London 1953.

[11] KUIPERS, L.: Generalized Legendre's associated functions (integral theorems, recurrence formulas). Monatshefte f. Math. **63**, 24—31 (1958).

Dept. of Math., Technological University, Delft (Niederlande)

(Eingegangen am 10. April 1960)

Sioson, F. M.
Math. Zeitschr. 75, 201—210 (1960)

Some primal Clusters

By
F. M. Sioson

Introduction. A consideration of the truth-values of certain many-valued logics has lead to the notion of an algebra $\mathfrak{A}=(A, \mathfrak{o}_1, \ldots, \mathfrak{o}_n)$ with the property that each function $f \in A^{A^k}$ $(k<\infty)$ is a composition of the primitive operations $\mathfrak{o}_1, \ldots, \mathfrak{o}_n$. This property is called *primality* and is quite strongly tied up with the notion of *independence*. A family of algebras of the same species are *independent* if and only if for every finite subfamily $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m$ and for every set of expressions $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$, there exists another expression Ψ such that $\Phi_i=\Psi$ is satisfied in $\mathfrak{A}_i$, for each $i=1, \ldots, m$. Following Foster [3] we shall denote this fact by $\Phi_i \equiv \Psi(\mathfrak{A}_i)$.

The composite notion of an independent family of primal algebras (or-*primal cluster*) is of some interest, see [2]. A number of them [2], [6] are known, namely, the family of all Sheffer algebras of species (n), $n \geqq 2$, the family of all n-fields, Post algebras and, more inclusively, all primal algebras $(A, \cdot, ^\circ)$, where $^\circ$ is a 0-to-1 cyclic permutation for some $0, 1 \in A$ and $0 \cdot \xi = \xi \cdot 0 = 0$, $1 \cdot \xi = \xi \cdot 1 = \xi$, for all $\xi \in A$. Members of the last family are called *strong frames* in order to distinguish them from *weak frames* which are those in which the $^\circ$ are simply permutations.

The object of this communication is to give some new families of primal algebras. It is proved here that the family of all pairwise non-isomorphic primal weak frames and the family of all Słupecki algebras form primal clusters. A method of immersing primal clusters with common frame operations into other primal clusters has also been given.

1. The Cluster of Weak Frames and Słupecki Algebras. We start by recalling a

Definition 1.1. A pair of elements $\alpha \in A$, $\beta \in B$ from a pair of distinct algebras $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ of the same species are *co-constant*, in symbols $\alpha \sim \beta$, if and only if there exists an expression Φ such that $\Phi=\alpha(\mathfrak{A})$ and $\Phi=\beta(\mathfrak{B})$.

From Foster [3], we borrow the following

Lemma 1.1. *If $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are a pair of non-isomorphic primal algebras of the same species, then to every pair $\beta', \beta'' \in B$, there exists at least one element $\alpha \in A$ such that $\alpha \sim \beta'$ and $\alpha \sim \beta''$.*

Lemma 1.2. *Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be any two algebras of the same species with $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in A$ and $\beta_1, \ldots, \beta_k \in B$. If $\alpha_i \sim \beta_i$ for $i=1, \ldots, k$, then $\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \sim \Phi(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ for each expression $\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_k)$.*

Proof. By hypothesis, there exist expressions Φ_i such that $\Phi_i \equiv \alpha_i(\mathfrak{A})$ and $\Phi_i = \beta_i(\mathfrak{B})$, for each $i=1, \ldots, k$. Thus, for any expression $\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_k)$, we have $\Phi(\Phi_1, \ldots, \Phi_k) \equiv \Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ $(\mathfrak{A})$ and $\Phi(\Phi_1, \ldots, \Phi_k) = \Phi(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ $(\mathfrak{B})$.

LEMMA 1.3. *If $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ are a pair of non-isomorphic primal weak frames, then for each $\alpha \in A$, there exist at least two elements $\beta', \beta'' \in B$ such that $\alpha \sim \beta'$ and $\alpha \sim \beta''$.*

PROOF. Assume the contrary, that is to say, for some $\alpha \in A$, for every $\beta', \beta'' \in B$, $\beta' \neq \beta''$, we either have $\alpha \not\sim \beta'$ or $\alpha \not\sim \beta''$. By Lemma 1.1, there exists at least one $\beta \in B$ such that $\alpha \sim \beta$. If we set $\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1, A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, and $B = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$, then $\alpha_1 \sim \beta_1$, but $\alpha_1 \not\sim \beta_i$ for all $i \neq 1$. Again by Lemma 1.1, for any $\alpha_i, \alpha_1 \in A$, there is a $\beta \in B$ such that $\alpha_i \sim \beta$, $\alpha_1 \sim \beta$. Since α_i is arbitrary, it follows then that $\alpha_i \sim \beta$ for each $i = 1, \ldots, n$. Also $\beta = \beta_1$. There is no other element $\beta \in B$, $\beta \neq \beta_1$, which is co-constant with all elements of A. Hence, since $A = A^\circ = \{\alpha_1^\circ, \ldots, \alpha_n^\circ\}$, this shows that $\beta_1^\circ = \beta_1$, by Lemma 1.2. Moreover, for each $\alpha \in A$, $\alpha = \alpha_i \cdot \alpha_j$ with $\alpha_i \sim \beta_1$, $\alpha_j \sim \beta_1$, so that by Lemma 1.2, $\alpha_i \cdot \alpha_j = \alpha \sim \beta_1 \cdot \beta_1$. Whence $\beta_1 \cdot \beta_1 = \beta_1$ and $\{\beta_1\}$ forms a one-element subalgebra of $\mathfrak{B}$. By virtue of the fact that the constant functions in primal algebras are generable by composition from the primitive operations, $\mathfrak{B}$ cannot possess a subalgebra. We thus get a contradiction.

DEFINITION 1.2. An ordered m-tuple $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ of elements from an algebra $\mathfrak{A}$ *covers* the algebra $\mathfrak{B}$ with $B = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ if and only if $\alpha_1 \sim \beta_1, \ldots, \alpha_m \sim \beta_m$.

LEMMA 1.4. *For any pair $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ of primal weak frames, there exists at least $m = card\ (B)$ distinct ordered m-tuples of elements of $\mathfrak{A}$ that covers $\mathfrak{B}$.*

PROOF. There is nothing in the proof of FOSTER [3] of the corresponding theorem for strong frames that will prevent its validity for weak frames. This same remark also applies to the following

LEMMA 1.5. *For each pair $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ of non-isomorphic primal weak frames, there exists an element $\alpha \in A$ such that $\alpha \sim \beta$ for all $\beta \in B$, in symbols $\alpha \sim B$.*

LEMMA 1.6. *If $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ are non-isomorphic primal weak frames, then $\alpha \sim B$ for each $\alpha \in A$.*

PROOF. By Lemma 1.5, there exists an $\alpha \in A$ such that $\alpha \sim B$. Without loss of generality, let $\alpha = \alpha_1$ and $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. If $\alpha' \neq \alpha_1$ is another element such that $\alpha' \sim B$, then set $\alpha' = \alpha_2$. Continue this process until we arrive at $\alpha_1 \sim B$, $\alpha_2 \sim B, \ldots, \alpha_k \sim B$, $\alpha_{k+1} \not\sim B, \ldots, \alpha_n \not\sim B$. Now, suppose $k < n$. Remembering that $B \cdot B = B$ and $B^\circ = B$, then for every pair $\alpha_i, \alpha_j \in A$ $(i, j = 1, \ldots, k)$ it follows that $\alpha_i \cdot \alpha_j \sim B$, $\alpha_i^\circ \sim B$, by Lemma 1.2. In other words, $\alpha_i \cdot \alpha_j = \alpha_r$ and $\alpha_i^\circ = \alpha_s$ for some $r, s \leq k$. This proves that under the same operations of $\mathfrak{A}$, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ forms a proper subalgebra of $\mathfrak{A}$, contrary to the assumption of primality.

The final result is now proved by using the following lemma of FOSTER [3].

LEMMA 1.7. *For a finite set of algebras $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m$ of the same species to be independent, it is necessary and sufficient that they be weakly coframal,* i.e. *there exist expressions $\Phi(\xi, \eta) = \xi \cdot \eta$ and $\Psi(\xi) = \xi^\circ$ such that $(A_i, \cdot, {}^\circ)$ are weak frames with $0_i, 1_i \in A_i$ for each $i = 1, \ldots, m$; and that for each $i, j = 1, \ldots, m$,*

there also exist expressions Φ_{ij} satisfying the conditions:

$$\Phi_{ij}(\xi) \equiv \begin{matrix} 1_i(\mathfrak{A}_i), \\ 0_j(\mathfrak{A}_j). \end{matrix}$$

THEOREM 1.1. *Any family of pairwise non-isomorphic primal weak frames are independent and hence, a primal cluster.*

PROOF. If $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m$ is any finite subfamily of the given family of weak frames, then by Lemma 1.6, we have

$$0_i \sim 1_j, \qquad i, j = 1, \ldots, m.$$

By Lemma 1.7, it follows that they are independent and therefore, the given family is a primal cluster.

A second proof of the previous theorem may be given by using a technique analogous to that of O'KEEFE's [6]. This proof is effected through the following Lemmas:

LEMMA 1.8. *If $\mathfrak{A}$ is a primal weak frame, then for any expression $K(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ with distinct occurences of indeterminates and for any other expression $\Phi(\xi)$, there exist expressions $\varphi_1(\xi), \ldots, \varphi_n(\xi)$ such that*

$$K\left(\varphi_1(\xi), \ldots, \varphi_n(\xi)\right) \equiv \Phi(\xi) \ (\mathfrak{A}).$$

PROOF. The proof is by induction on the number of occurences of the operation symbol $\cdot$ in $K(\eta_1, \ldots, \eta_n)$. If there is no occurence of $\cdot$ in K, then K is of the form $\eta^{\circ i} = (\eta^{\circ i-1})^{\circ}$, where $\eta^{\circ 0} = \eta$. In this case, if h is an integer such that

$$\eta^{\circ i+h} \equiv \eta \ (\mathfrak{A}),$$

then we simply take $\varphi_1(\xi) = \Phi(\xi)^{\circ h}$; so that

$$\varphi_1(\xi)^{\circ i} \equiv \Phi(\xi)^{\circ i+h} \equiv \Phi(\xi) \ (\mathfrak{A}).$$

Assume that the Lemma is true for all expressions K with m or less distinct occurences of $\cdot$. Now, consider any such expression K with $m+1$ occurences of $\cdot$. Clearly,

$$K = [K_1(\eta_{k_1}, \ldots, \eta_{k_t}) \cdot K_2(\eta_{k_t+1}, \ldots, \eta_{k_n})]^{\circ j},$$

where each K_1, K_2 has m or less occurences of $\cdot$. By hypothesis of induction, there exists an expression $\varphi(\xi)$ such that

$$\varphi(\xi)^{\circ j} \equiv \Phi(\xi) \ (\mathfrak{A}).$$

If $\varphi'(\xi)$ is an expression such that $\varphi'(\xi) \equiv 1 \ (\mathfrak{A})$, then

$$[\varphi'(\xi) \cdot \varphi(\xi)]^{\circ j} \equiv \varphi(\xi)^{\circ j} \equiv \Phi(\xi) \ (\mathfrak{A}).$$

Considering K_1 together with $\varphi'(\xi)$ and K_2 with $\varphi(\xi)$, it now follows by the hypothesis of induction that there exist expressions $\varphi_{k_1}, \ldots, \varphi_{k_t}, \varphi_{k_t+1}, \ldots, \varphi_{k_n}$ such that

$$K_1\left(\varphi_{k_1}(\xi), \ldots, \varphi_{k_t}(\xi)\right) \equiv \varphi'(\xi) \ (\mathfrak{A}),$$

$$K_2\left(\varphi_{k_t+1}(\xi), \ldots, \varphi_{k_n}(\xi)\right) \equiv \varphi(\xi) \ (\mathfrak{A}).$$

Thus we finally get

$$K\left(\varphi_1(\xi),\ldots,\varphi_n(\xi)\right) = \left[K_1\left(\varphi_{k_1}(\xi),\ldots,\varphi_{k_t}(\xi)\right)\cdot K_2\left(\varphi_{k_{t+1}}(\xi),\ldots,\varphi_{k_n}(\xi)\right)\right]^{\circ_j}$$
$$\equiv \left(\varphi'(\xi)\cdot\varphi(\xi)\right)^{\circ_j} \equiv \varphi(\xi)^{\circ_j} \equiv \Phi(\xi)\ (\mathfrak{A}).$$

Induction is completed and the Lemma proved.

The following lemma is borrowed from O'KEEFE [6].

LEMMA 1.9. *Let $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ be a pair of non-isomorphic primal algebras of the same species. Then there exist n^n expressions Φ_i, $i=1,\ldots,n^n$, $n=$ card (B) such that*

$$\Phi_i \equiv \Phi_j\ (\mathfrak{A}),\quad \text{for all } i,j \leqq n^n;$$

and with the additional property that for any other expression $\Psi(\xi)$

$$\Phi_i(\xi) \equiv \Psi(\xi)\ (\mathfrak{B}),$$

for some $i \leqq n^n$.

LEMMA 1.10. *Let $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ be a pair of non-isomorphic primal weak frames. Then for each $\alpha \in A$ and every expression $\Phi(\xi)$, there exists another expression $\Gamma(\xi)$ such that*

$$\Gamma(\xi) \equiv \begin{matrix} \alpha & (\mathfrak{A}), \\ \Phi(\xi) & (\mathfrak{B}). \end{matrix}$$

PROOF. By primality, there exists an expression $K'(\xi)$ such that $K'(\xi) \equiv \alpha\,(\mathfrak{A})$. Let $K(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ be the expression obtained from $K'(\xi)$ by substituting a distinct indeterminate η_i for each occurence of ξ in K', so that $K(\xi,\ldots,\xi) = K'(\xi)$. By Lemma 1.8, there exist expressions $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ such that

$$K\left(\varphi_1(\xi),\ldots,\varphi_n(\xi)\right) \equiv \Phi(\xi)\ (\mathfrak{B}).$$

By Lemma 1.9, there exist expressions Φ_i such that $\Phi_i \equiv \Phi_j$ $(\mathfrak{A})$, $i,j \leqq n^n$ $\left(n = \text{card } (B)\right)$ and such that each $\varphi_i(\xi) \equiv \Phi_{k_i}(\xi)$ $(\mathfrak{B})$, for some $k_i \leqq n^n$, $i=1,\ldots,n$. Thus it follows that

$$K\left(\Phi_{k_1}(\xi),\ldots,\Phi_{k_n}(\xi)\right) \quad \begin{matrix} K'(\Phi_{k_i}) \equiv \alpha\ (\mathfrak{A}), \\ K\left(\varphi_1(\xi),\ldots,\varphi_n(\xi)\right) \equiv \Phi(\xi)\ (\mathfrak{B}). \end{matrix}$$

THEOREM 1.2. *Any pair of non-isomorphic primal weak frames $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ are independent.*

PROOF. Because of primality, for any $\beta \in B$, there exists an expression $\Theta'(\mu,\nu)$ such that

$$\Theta'(\mu,\beta) \equiv \mu\ (\mathfrak{B}) \quad \text{and} \quad \Theta'(\beta,\nu) \equiv \nu\ (\mathfrak{B}).$$

Clearly,

$$\Theta'(\mu,\nu) = \left(\Theta_1\cdot\Psi_1(\mu,\nu)\right)^{\circ_{k_1}}.$$

If Θ_1 contains only one indeterminate, then we are through; if not, we repeat the process on Θ_1, so that

$$\Theta'(\mu,\nu) = \left(\Theta_2\cdot\Psi_2(\mu,\nu)\right)^{\circ_{k_2}}\cdot\Psi_1(\mu,\nu)^{\circ_{k_1}}.$$

After a finite number of repetitions of this procedure we will arrive at

$$\Theta'(\mu,\nu)=\left(\ldots\left((\Theta_m\cdot\Psi_m(\mu,\nu))^{\cap k_m}\cdot\Psi_{m-1}(\mu,\nu)\right)^{\cap k_{m-1}}\ldots\cdot\Psi_1(\mu,\nu)\right)^{\cap k_1},$$

where Θ_m contains only one indeterminate. Without loss of generality, we may assume this indeterminate to be ν. Now, if $\varphi(\eta)$ is the expression such that $\varphi(\eta)\equiv\beta\ (\mathfrak{B})$, and $\Phi_i(\xi)$ are expressions such that

$$\Phi_i(\eta)=\Psi_i(\eta,\varphi(\eta)),$$

$i=1,\ldots,m$, and $\varrho=\Theta_m(\beta)$, then

$$\Theta=\left(\ldots\left((\varrho\cdot\Phi_m(\eta))^{\cap k_m}\cdot\Phi_{m-1}(\eta)\right)^{\cap k_{m-1}}\ldots\cdot\Phi_1(\eta)\right)^{\cap k_1}\equiv\Theta'(\eta,\beta)\equiv\eta\ (\mathfrak{B}).$$

Let s be an integer such that

$$\Delta=\left(\ldots((\xi^{\cap s}\cdot 1)^{\cap k_m}\cdot 1)^{\cap k_{m-1}}\ldots\cdot 1\right)^{\cap k_1}=\xi^{\cap s+k_m+k_{m-1}+\cdots+k_1}\equiv\xi\ (\mathfrak{A}).$$

Thus we have constructed two polynomial expressions Θ, Δ over $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ respectively, which possess the same "form". Matching their corresponding "factors", we have

$$\xi^{\cap s}\text{ matched with }\varrho,$$

and

$$1\text{ matched with }\Phi_i(\eta),$$

$i=1,\ldots,m$. Applying Lemma 1.10, there exist expressions $\Gamma(\xi),\Gamma_1(\eta),\ldots,\Gamma_m(\eta)$ such that

$$\Gamma(\xi)\equiv\begin{matrix}\xi^{\cap s}\ (\mathfrak{A}),\\ \varrho\ (\mathfrak{B});\end{matrix}$$

$$\Gamma_i(\eta)\equiv\begin{matrix}1\ (\mathfrak{A}),\\ \Phi_i(\eta)\ (\mathfrak{B}),\end{matrix}$$

$i=1,\ldots,m$. Thus if $\Pi(\xi,\eta)$ is the expression

$$\left(\ldots\left((\Gamma(\xi)\cdot\Gamma_m(\eta))^{\cap k_m}\cdot\Gamma_{m-1}(\eta)\right)^{\cap k_{m-1}}\ldots\cdot\Gamma_1(\eta)\right)^{\cap k_1},$$

then we get

$$\Pi(\xi,\eta)\equiv\begin{matrix}\Theta=\xi\ (\mathfrak{A}),\\ \Delta\equiv\eta\ (\mathfrak{B}),\end{matrix}$$

For any other pair of words Φ, Φ', then

$$\Pi(\Phi,\Phi')\equiv\begin{matrix}\Phi\ (\mathfrak{A}),\\ \Phi'\ (\mathfrak{B}).\end{matrix}$$

Hence $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are independent.

Theorem 1.1 follows from Theorem 1.2 by way of Lemma 1.7.

Corollary 1.3. *The family of all pairwise non-isomorphic primal strong frames forms a primal cluster.*

Remarks. Following the procedure devised by O'Keefe [6] for proving the independence of Sheffer algebras, i.e. primal algebras with a single operation; it may be also shown that the family of all pairwise non-isomorphic

primal algebras $(A, \cdot, \beta)$ of species $(2, 0)$ subject to the conditions that $\beta \cdot \xi$, $\xi \cdot \beta$ are permutations forms a primal cluster. One example of such a family is given by the algebras such that

(1) $\xi \cdot \beta$ is a cyclic permutation on A;

(2) $\beta \cdot \xi$ permutes a pair of elements in A, but leaves the rest fixed;

(3) $\xi \cdot \xi = \xi$ for all $\xi \neq \beta$.

That these algebras are primal is a consequence of the following two theorems of PICCARD [7] and SŁUPECKI [8].

THEOREM (PICCARD). *The set of all unary functions on a finite set is generable by composition from only three* (1) *a cyclic permutation,* (2) *a permutation which permutes a pair of elements but leaves the rest of the elements fixed, and* (3) *a unary function which maps all elements into itself except for one which is mapped onto another distinct element.*

THEOREM (SŁUPECKI). *An arbitrary finite algebra with at least two elements is primal if and only if all unary functions and at least one binary function whose range is the whole of the algebra and which is not equivalent to a unary function are all generable by composition from its primitive operations.*

It is further remarked that the method mentioned above may also be applied to a corresponding family of algebras of species $(n, 0)$, $n > 2$. The tediousness of the proofs, however, and their great similarity to O'Keefe's proofs do not warrant their publication here.

There is another more familiar class of primal algebras considered by logicians which involve 0-ary or constant operations, namely, the algebra of truth values $(\{0, \ldots, n-1\}, C\xi\eta = \max\{0, \eta - \xi\}, N\xi = n - 1 - \xi)$ of the Łukasiewicz-Tarski logics with a Słupecki T-function 1 added to its primitive operations. Subsequently, we shall call these, *Słupecki algebras*. For these algebras we have the

THEOREM 1.4. *The family of all Słupecki algebras,* $\mathfrak{A}_n = (\{0, \ldots, n-1\}, C, N, 1)$ *of species* $(2, 1, 0)$, $2 \leqq n < \infty$, *is independent and therefore, forms a primal cluster.*

PROOF. Consider any finite subfamily $\mathfrak{A}_{n_i}$, $i = 1, \ldots, m$, of them. These algebras are strongly coframal with the frame operations defined by the expressions $\xi \cdot \eta = CC\xi\eta\eta$ and $\xi^{\circ} = KC1\xi N_k\xi$, where $K\xi\eta = NCCN\xi N\eta N\eta$ $\left(k > \max_i\{n_i - 2\}\right)$ and N_k is defined inductively as follows:

$$N_0\xi = N\xi$$

$$N_k\xi = C\xi N_{k-1}\xi.$$

It is easily verified that for all $\xi < n_i$, $i = 1, \ldots, m$,

$$0 \cdot \xi = \xi \cdot 0 = 0,$$

$$(n_i - 1) \cdot \xi = \xi \cdot (n_i - 1) = \xi.$$

Furthermore, it may be also shown that

$$N_k\xi = \max\{0, \max\{0, n_i - 1 - (k+1)\xi\}\}$$

so that by virtue of the choice of $k > \max_i \{n_i - 2\}$, then

$$N_k \xi = \begin{matrix} n_i - 1, & \text{if } \xi = 0, \\ 0, & \text{if } \xi \neq 0, \end{matrix} \qquad i = 1, \ldots, m.$$

After verifying that $K \xi \eta = \max\{\xi, \eta\}$, it is seen without difficulty that then

$$\xi^{\frown} = K C 1 \xi N_k \xi = \begin{matrix} n_i - 1, & \text{if } \xi = 0, \\ \xi - 1, & \text{if } \xi \neq 0, \end{matrix}$$

$i = 1, \ldots, m$. These prove that the algebras are strongly coframal.

Consider now the expression $c_n(\xi) = \left(\left(\left(\ldots (\xi \cdot \xi^{\frown}) \cdot \xi^{\frown\frown}\right) \ldots\right) \cdot \xi^{\frown n-1}\right)$ and suppose that $n_i < n_j$, $i, j = 1, \ldots, m$. Choosing $\Phi_{n_i}(\xi) = \left(e_{n_j}^{\frown n_i} \cdot e_{n_j}^{\frown n_j - 1}\right)^{\frown}$, it is easily shown that

$$\Phi_{n_i}(\xi) \equiv \begin{matrix} n_i - 1 & (\mathfrak{A}_{n_i}), \\ 0 & (\mathfrak{A}_{n_j}). \end{matrix}$$

To arrive at a corresponding word $\Phi_{n_j}(\xi)$, we consider two cases:

Case I: n_i divides n_j.

In this case let $r = n_j - n_i > n_i$ and $d = r - n_i + 1$. Then it is easy to see that

$$\Phi_{n_j}(\xi) = \left(e_{n_j}^{\frown n_i} \cdot e_{n_j}^{\frown n_i + d}\right)^{\frown n_i} \equiv \begin{matrix} 0 & (\mathfrak{A}_{n_i}), \\ n_j - 1 & (\mathfrak{A}_{n_j}). \end{matrix}$$

Case II: n_i does not divide n_j.

In this case, there is an h such that $0^{\frown h n_i} \geqq n_i - 1$. Let k be the integer such that

$$\left(0^{\frown h n_i}\right)^{\frown k} = n_i - 1 \quad (\mathfrak{A}_{n_j}).$$

Whence,

$$\Phi_{n_j}(\xi) = \left(e_{n_j}^{\smile n_i} \cdot e_{n_j}^{\frown h n_i + k}\right)^{\frown n_i} \equiv \begin{matrix} 0 & (\mathfrak{A}_{n_i}), \\ n_j - 1 & (\mathfrak{A}_{n_j}), \end{matrix}$$

where $^{\smile}$ is the inverse of $^{\frown}$. $^{\smile}$ is of course expressible in terms of $^{\frown}$ since the sets are finite.

The independence of the given finite subfamily and hence of the family now follows.

2. Immersed Primal Clusters. In a recent paper [4], FOSTER concerned himself with the problem of immersing algebras into algebras of a more comprehensive species. In this section, we shall be occupied with concrete results of that kind when the additional operations are 0-ary and the extended algebras are primal. For example, we get without too much difficulty from known results the following:

THEOREM 2.1. *If $(A, \cdot)$ is any finite algebra with one binary operation, $B \supset A$ with $\infty > \text{card}(B) \geqq \text{card}(A) + 2$, then there exists an extension $(B, \cdot, \beta)$ of the given algebra with one 0-ary operation β which is primal.*

PROOF. If $A=\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ and $B-A=\{\beta_1, \ldots, \beta_m=\beta\}$, then we may define the extended operation $\cdot$ quite arbitrarily except for the fact that (1) $\xi \cdot \beta=\xi$ for all $\xi \neq \beta$, $\beta \cdot \beta=\beta_{m-1}$, (2) $\beta \cdot \xi$ is a cyclic permutation of B, and (3) $(\beta \cdot \beta) \cdot \xi$ permutes $\beta=\beta_m$ and β_{m-1}, but leaves all the rest fixed. By PICCARD's Theorem, it is clear that the words or expressions $\beta \cdot \xi$, $(\beta \cdot \beta) \cdot \xi$, and $\xi \cdot \beta$ represent functions on B that generate the set of all unary functions on B. Since the $\cdot$-table of B obviously contain a row and a column with at least two distinct elements, it therefore follows by SŁUPECKI's Theorem that $(B, \cdot, \beta)$ is primal.

REMARKS. For the case when card (B) = card $(A)+1$, the theorem is true only when card $(A) \leqq 2$. It fails to hold for the first time when card $(A)=3$, as the following counter-example will show:

Consider the binary algebra $(\{0, 1, 2\}, \cdot)$ where $\xi \cdot \eta=0$ for all $\xi, \eta \in \{0, 1, 2\}$. In order that $(\{0, 1, 2, 3\}, \cdot, 3)$ be primal, it is necessary and sufficient that the three unary functions in PICCARD's theorem be generable by composition from $\cdot$ and 3. Thus without loss of generality we may assume that $\xi \cdot 3$, $3 \cdot \xi$ are two permutations that generate all permutations of the set $\{0, 1, 2, 3\}$. This is without loss of generality because in order to generate all unary functions on any set it is necessary to generate all permutations and this cannot be effected by less than two permutations. The $\cdot$-table of the extended algebra may thus be assumed as

$\cdot$	0	1	2	3
0	0	0	0	1
1	0	0	0	2
2	0	0	0	3
3	1	2	3	0

It is easy to see that the only unary functions on the given set of elements generated by $\cdot$ and 3 are all the permutations and their compositions with ξ, $\xi \cdot \xi$, $\xi \cdot 1$, $1 \cdot \xi=\xi \cdot 2$, and $2 \cdot \xi$. These give a total of only $5 \cdot 4!=120$ unary functions out of a possible $4^4=256$. Thus $(\{0, 1, 2, 3\}, \cdot, 3)$ cannot be defined in any way to be primal.

The more interesting immersions, of course, are those which preserves certain properties, e.g. primality and independence. We now consider this question.

DEFINITION 2.1. Let $\mathfrak{B}$ be an extension of $\mathfrak{A}$. An element $\beta \in B$ is *algebraic over* $\mathfrak{A}$ if and only if there exists an expression Φ of the species of $\mathfrak{A}$, $\Phi \not\equiv \alpha(\mathfrak{A})$ for each $\alpha \in A$, such that $\Phi(\beta) \in A$. Otherwise, β is *transcendental over* $\mathfrak{A}$. Similarly, $\mathfrak{B}$ is algebraic over $\mathfrak{A}$ if and only if every element of $\mathfrak{B}$ is algebraic over $\mathfrak{A}$. Otherwise, $\mathfrak{B}$ is *transcendental over* $\mathfrak{A}$.

THEOREM 2.2. *Let* $(A, \ldots, \cdot, {}^{\circ})$ *be a primal algebra of species* s *with frame* $(A, \cdot, {}^{\circ})$ *and distinguished elements* $0, 1 \in A$. *If* B *is an arbitrary finite set containing* A, *then there exists an extension* $(A, \ldots, \cdot, {}^{\circ}, \beta)$ *of species* $(s, 0)$ *which is primal and algebraic over* $(A, \ldots, \cdot, {}^{\circ})$.

PROOF. Let $B-A=\{\beta_1=\beta, \ldots, \beta_n\}$. Define the extended operations such that $\beta_n^{\circ}=\beta_1$, $\beta_i^{\circ}=\beta_{i+1}$ for $i\neq n$, $\beta_i\cdot 1=1\cdot\beta_i=\beta_i$, $\beta_i\cdot\beta_i=1$, $\beta_i\cdot\beta_j=0$ if $i\neq j$, $\beta_i\cdot\alpha=\alpha\cdot\beta_i=0$ for all $\alpha\neq 1$, $\alpha\in A$, $i,j=1,\ldots,n$. For the rest of the operations, if there are any, say $\boldsymbol{o}_k$, if for some $\xi_i=\beta_j$, then set $\boldsymbol{o}_k(\xi_1,\ldots,\xi_n)=0$. The elements β_i are clearly algebraic, since $\beta_i\cdot\beta_i=1\in A$. Let k be an integer such that $1^{\circ k}=0$, $\delta_\alpha(\xi)$, $\alpha\in A$, expressions for the characteristic functions in $\mathfrak{A}$, and $\sigma(\xi)$ any expression which effects a cyclic permutation of the elements 0 and 1 of A. Then it is easily shown that the expressions

$$\delta'_{\beta_i}(\xi)=(\xi^{\circ k}\cdot\xi^{\circ k})\cdot\delta_1(\beta^{\circ n+i-1}\cdot\xi), \qquad i=1,\ldots,n,$$
$$\delta'_\alpha(\xi)=\delta_\alpha(\xi)\cdot[[\ldots[\sigma(\delta'_{\beta_1}(\xi))\cdot\sigma(\delta'_{\beta_2}(\xi))]\ldots]\cdot\sigma(\delta'_{\beta_n}(\xi))]$$

$\alpha\in A$, are characteristic functions on B.

The theorem then will follow from the following characterization of FOSTER [1]:

THEOREM (FOSTER). *A necessary and sufficient condition that an algebra* $(A, \boldsymbol{o}_1, \ldots, \boldsymbol{o}_n)$ *be primal is that there exist expressions* $\Phi(\xi,\eta)=\xi\cdot\eta$, $\Psi(\xi)=\xi^{\circ}$ *such that* $(A,\cdot,^{\circ})$ *with distinguished elements* $0, 1\in A$ *is a strong frame and each of the characteristic functions*

$$\delta_\alpha(\xi)=\begin{matrix}1 & \text{if } \xi=\alpha,\\ 0 & \text{if } \xi\neq\alpha,\end{matrix}$$

$\alpha\in A$, *is generable by composition from* $\boldsymbol{o}_1, \ldots, \boldsymbol{o}_n$.

REMARKS. Although the above result gives an example of an algebraic extension, certain primal extensions which involve the addition of 0-ary operations may also be transcendental. Consider, for example, the 3-field $(\{0,1,2\},\cdot,^{\circ})$ and the algebra $(\{0,1,2,\alpha,\beta\},\cdot,^{\circ},\beta)$ whose tables are given by

$\cdot$	0	1	2	β	α
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	β	α
2	0	2	1	0	1
β	0	β	0	α	β
α	0	α	1	2	α

$^{\circ}$	
0	1
1	2
2	0
α	α
β	β

Since $\alpha\cdot\alpha=\alpha$, $\alpha^{\circ}=\alpha$, no composition Φ of $\cdot$ and $^{\circ}$ can exist such that $\Phi(\alpha)\in\{0,1,2\}$. Hence the element α is transcendental over the 3-field. If $\sigma(\xi)$ denotes an expression which effects a cyclic permutation of 0 and 1 and $\delta_n(\xi)$, $n=0,1,2$, are expressions for the characteristic functions in the 3-field, then it is easily verified that

$$\delta'_\beta(\xi)=\delta_1[(\beta\cdot\xi)\cdot((\beta\cdot\beta)\cdot\beta)]=\delta_1[(\beta\cdot\xi)\cdot 2],$$
$$\delta'_\alpha(\xi)=\delta_1[((\beta\cdot\beta)\cdot\beta)\cdot(\xi\cdot\xi)]\cdot[\xi\cdot((\beta\cdot\beta)\cdot\beta)]=\delta_1(2\cdot(\xi\cdot\xi))\cdot(\xi\cdot 2),$$
$$\delta'_n(\xi)=\delta_n(\xi)\cdot[\sigma(\delta'_\alpha(\xi))\cdot\sigma(\delta'_\beta(\xi))], \qquad n=0,1,2,$$

are expressions for the characteristic functions on the extended algebra. By Foster's characterization of primal algebras, it follows that $\langle\{0, 1, 2, \alpha, \beta\}, \cdot, {}^{\circ}, \beta\rangle$ is also primal.

For definiteness extensions of this kind and the kind mentioned in Theorem 2.2 will be called *primal framal 0-ary extensions.*

Now, we have the following

Theorem 2.3. *If the family of algebras* $\{\mathfrak{A}_i = (A_i, \ldots, \cdot, {}^{\circ}) : i \in \omega\}$ *forms a primal cluster with frames* $(A_i, \cdot, {}^{\circ})$ *whose distinguished elements are* 0_i, 1_i, *and if* $B_i \supset A_i$ *for each* $i \in \omega$, *then any family of primal framal 0-ary extensions* $\{\mathfrak{B}_i = (B_i, \ldots, \cdot, {}^{\circ}, \beta, \ldots) : i \in \omega\}$ *of the given family with frames* $(B_i, \cdot, {}^{\circ})$ *forms also a primal cluster.*

Proof. The family of extended algebras are obviously weakly coframal. By virtue of the primality and independence of the algebras in the original family and Lemma 1.7, there exists expressions Φ_{ij} corresponding to each pair of algebras $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{A}_j$ such that

$$\Phi_{ij}(\xi) \equiv \begin{matrix} 1_i\ (\mathfrak{A}_i), \\ 0_j\ (\mathfrak{A}_j). \end{matrix}$$

Without too much difficulty it is easily verified that for the extended algebras $\mathfrak{B}_i$, $\mathfrak{B}_i$ whatsoever,

$$\Phi_{ij}\big(\Phi_{ij}(\xi \cdot \Phi_{ij}(\xi))\big) \equiv \begin{matrix} 1_i\ (\mathfrak{B}_i), \\ 0_j\ (\mathfrak{B}_j). \end{matrix}$$

Thus by virtue of Lemma 1.7, it follows that the family of all algebras $\{\mathfrak{B}_i : i \in \omega\}$ is independent and hence, a primal cluster.

References

[1] Foster, A. L.: Generalized Boolean theory of universal algebras. I. Math. Z. **58**, 306—336 (1953).

[2] Foster, A. L.: The identities of — and unique factorization within — classes of universal algebras. Math. Z. **62**, 171—188 (1955).

[3] Foster, A. L.: The generalized Chinese remainder theorem for universal algebras. Math. Z. **66**, 452—469 (1957).

[4] Foster, A. L.: On the imbeddability of universal algebras in relation to their set of identities. Math. Annalen **138**, 219—238 (1959).

[5] Lukasiewicz, J., u. A. Tarski: Untersuchungen über den Aussagenkalkul. C. R. Soc. Sci. Lett. Varsovie **33**, 1—21 (1930).

[6] O'Keefe, Edward S.: On the independence of primal algebras. Math. Z. **73**, 79—94 (1960).

[7] Piccard, Sophie: Sur les fonctions definies dans les ensembles finies quelconque. Fundamenta Math. **24**, 183—185 (1935).

[8] Słupecki, Jerzy: Kryterium pełnosci wielowartosciowych systemow logiki zdan. C. R. Soc. Sci. Lett. Varsovie **32**, 102—110 (1939).

Dept. of Math., University of California, Berkeley, Cal. (U.S.A.)

(Eingegangen am 19. Mai 1960)

Tamaschke, O.
Math. Zeitschr. 75, 211—214 (1961)

Gruppen mit reduziblem Subnormalteilerverband

Von
Olaf Tamaschke

Eine Untergruppe $\mathfrak{A}$ einer Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt *subnormal* in $\mathfrak{G}$ oder *Subnormalteiler* von $\mathfrak{G}$, wenn eine endliche Normalkette von $\mathfrak{G}$ bis $\mathfrak{A}$ existiert. Die Menge $s\mathfrak{G}$ aller Subnormalteiler von $\mathfrak{G}$ bildet unter zusätzlichen Voraussetzungen einen Teilverband des Verbandes aller Untergruppen von $\mathfrak{G}$, z.B. dann, wenn in $s\mathfrak{G}$ die Maximalbedingung erfüllt ist [Wielandt *4*]. Wir zeigen:

Satz 1. *Es sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe mit endlicher Kompositionsreihe. Genau dann ist der Verband $s\mathfrak{G}$ aller Subnormalteiler von $\mathfrak{G}$ isomorph zum direkten Produkt zweier Verbände L_1 und L_2, wenn $\mathfrak{G}$ isomorph ist zum direkten Produkt zweier Gruppen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ mit der Eigenschaft, daß keine abelsche Kompositionsfaktorgruppe von $\mathfrak{G}_1$ isomorph ist zu einer Kompositionsfaktorgruppe von $\mathfrak{G}_2$. Es gilt dann $L_1 \cong s\mathfrak{G}_1$ und $L_2 \cong s\mathfrak{G}_2$.*

Für auflösbare endliche Gruppen ist dieser Satz bekannt [Curzio *1*, Theor. III]. Mit $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ bezeichnen wir das Erzeugnis zweier Untergruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, mit $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ ihren Durchschnitt. Zwei Kompositionsfaktorgruppen $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}/\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{G}$ heißen *transponiert*, wenn ($\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \cup \mathfrak{H}$ *und* $\mathfrak{K} = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{H}$) oder ($\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{K}$ *und* $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{K}$) gilt; sie heißen *projektiv*, wenn es eine Kette transponierter Kompositionsfaktorgruppen gibt, die von $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{H}/\mathfrak{K}$ führt. Wir beachten, daß $s\mathfrak{G}$ ein submodularer längenendlicher Verband ist, wenn $\mathfrak{G}$ eine endliche Kompositionsreihe besitzt ([*3*, (2.4)] und [*2*]). Zum Beweis unseres Satzes benützen wir den folgenden

Hilfssatz. *Es sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe mit endlicher Kompositionsreihe. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien Subnormalteiler von $\mathfrak{G}$. Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:*

(a) *Es gibt eine Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ zwischen $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$, die projektiv ist zu einer Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$.*

(b) *Es gibt eine abelsche Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{R}_a/\mathfrak{S}_a$ zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, die isomorph ist zu einer Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{R}_b/\mathfrak{S}_b$ zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$.*

(c) *Es gibt eine abelsche Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{L}_a/\mathfrak{M}_a$ zwischen $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$, die isomorph ist zu einer Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{L}_b/\mathfrak{M}_b$ zwischen $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}$.*

Beweis. 1. Wir setzen (a) voraus. $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ ist abelsch [*3*, (3.5)]. Es existiert eine Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{R}_b/\mathfrak{S}_b$ zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, die projektiv ist zu $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ [*2*, Satz 2]. $\mathfrak{R}_b/\mathfrak{S}_b$ ist projektiv und daher auch isomorph zu $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$, d.h. es gilt (b).

2. Es sei (b) erfüllt. In jeder Kompositionskette von $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ bis $\mathfrak{A}$ gibt es eine Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$, die projektiv ist zu $\mathfrak{R}_b/\mathfrak{S}_b$, und in jeder Kompositionskette von $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ bis $\mathfrak{B}$ gibt es eine Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{H}/\mathfrak{K}$, die projektiv ist zu $\mathfrak{R}_a/\mathfrak{S}_a$ [2, Satz 2]. Wir wählen $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ so, daß es keine Kompositionsfaktorgruppe zwischen $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{L}$ gibt, die projektiv ist zu $\mathfrak{R}_b/\mathfrak{S}_b$. Ebenso bestimmen wir $\mathfrak{H}/\mathfrak{K}$ so, daß zwischen $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ keine Kompositionsfaktorgruppe vorhanden ist, die zu $\mathfrak{R}_a/\mathfrak{S}_a$ projektiv ist. Dann kann $\mathfrak{D} = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{L}$ weder in $\mathfrak{K}$ noch in $\mathfrak{M}$ enthalten sein ([2, Satz 2] angewandt auf $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{L}$ und auf $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$, je nachdem ob $\mathfrak{D} \leqq \mathfrak{M}$ oder $\mathfrak{D} \leqq \mathfrak{K}$ vorausgesetzt wird). Daraus folgt $\mathfrak{H} = \mathfrak{D}\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L} = \mathfrak{D}\mathfrak{M}$, d.h. $\mathfrak{H}/\mathfrak{K} \cong \mathfrak{D}/\mathfrak{D} \cap \mathfrak{K}$ ist transponiert zu $\mathfrak{D}/\mathfrak{D} \cap \mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}/\mathfrak{M} \cong \mathfrak{D}/\mathfrak{D} \cap \mathfrak{M}$ ist transponiert zu $\mathfrak{D}/\mathfrak{D} \cap \mathfrak{M}$. Wenn $\mathfrak{D} \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{D} \cap \mathfrak{M}$, dann ist die Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$, die zwischen $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$ liegt, projektiv zu $\mathfrak{H}/\mathfrak{K}$ und daher auch projektiv zu der Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{R}_a/\mathfrak{S}_a$, die zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ liegt. Gilt jedoch $\mathfrak{D} \cap \mathfrak{K} \neq \mathfrak{D} \cap \mathfrak{M}$, dann ist $\mathfrak{D}/\mathfrak{K} \cap \mathfrak{M}$ elementarabelsch vom Typ (p, p) und daher ist $\mathfrak{D}/\mathfrak{D} \cap \mathfrak{K}$ projektiv zu $\mathfrak{D}/\mathfrak{D} \cap \mathfrak{M}$ [3, (3.3)]. Auch hieraus folgt, daß $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ projektiv ist zu $\mathfrak{R}_a/\mathfrak{S}_a$. Es gilt (a).

3. Die Aussagen (b) und (c) sind gleichwertig [2, Satz 2].

BEWEIS VON SATZ 1. I. Wir setzen $s\mathfrak{G} \cong L_1 \times L_2$ voraus. Jeder Subnormalteiler $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$ ist dann eindeutig darstellbar als Erzeugnis zweier subnormaler Untergruppen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$, die Elementen $(a_1, 0_2)$ und $(0_1, a_2)$ entsprechen, wobei 0_i das kleinste Element von L_i und $a_j \in L_j$ ist. Die Verbandsverknüpfungen erfolgen komponentenweise: Aus $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$ folgt $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = (\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{B}_1) \cup (\mathfrak{A}_2 \cap \mathfrak{B}_2)$ und $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} = (\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{B}_1) \cup (\mathfrak{A}_2 \cup \mathfrak{B}_2)$. Die Abbildungen $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_i$ $(i = 1, 2)$ sind daher Verbandshomomorphismen von $s\mathfrak{G}$ in sich. Entsprechen den Elementen $(I_1, 0_2)$ und $(0_1, I_2)$ [I_i das maximale Element von L_i] die Subnormalteiler $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$, dann gilt $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{G}_i$. Aus [2, Satz 3] folgt, daß keine Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{M} \geqq \mathfrak{G}_i$ projektiv ist zu einer Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{N}/\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}_i$. Weil $\mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{1}$ gilt, so kann nach dem Hilfssatz keine abelsche Kompositionsfaktorgruppe von $\mathfrak{G}_1$ isomorph sein zu einer Kompositionsfaktorgruppe von $\mathfrak{G}_2$. Es sind $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ elementweise vertauschbar [4, (19)]. $\mathfrak{G}$ ist isomorph zum direkten Produkt $\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$.

II. Es sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$ und keine abelsche Kompositionsfaktorgruppe von $\mathfrak{G}_1$ sei isomorph zu einer Kompositionsfaktorgruppe von $\mathfrak{G}_2$. Wir identifizieren die Elemente von $(\mathfrak{G}_1, 1)$ mit denen von $\mathfrak{G}_1$ und die Elemente von $(1, \mathfrak{G}_2)$ mit denen von $\mathfrak{G}_2$. Aus dem Hilfssatz folgt, daß es keine Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{M} \geqq \mathfrak{G}_i$ gibt, die projektiv ist zu einer Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{N}/\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}_i$ $(i = 1, 2)$. Daher liefern die Abbildungen $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_i = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{G}_i$ Verbandshomomorphismen von $s\mathfrak{G}$ in sich [2, Satz 3].

Wir zeigen, daß jeder Subnormalteiler $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$ durch seine Komponenten $\mathfrak{A}_i$ eindeutig bestimmt ist. Angenommen, es gilt $\mathfrak{C} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{G}_1) \cup (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{G}_2) < \mathfrak{A}$. Dann ist $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{G}_i = \mathfrak{C} \cap \mathfrak{G}_i$. Wir wählen einen maximalen Normalteiler $\mathfrak{N} \geqq \mathfrak{C}$ von $\mathfrak{A}$. Es gibt zwischen $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{G}_i$ und $\mathfrak{G}_i$ eine Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{L}_i/\mathfrak{M}_i$,

die projektiv ist zu $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ $(i=1, 2)$, [2, Satz 2]. $\mathfrak{L}_1/\mathfrak{M}_1$ ist projektiv zu $\mathfrak{L}_2/\mathfrak{M}_2$. Andererseits existiert eine Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{R}_1/\mathfrak{S}_1$ von $\mathfrak{G}_1$, die projektiv ist zu $\mathfrak{L}_2/\mathfrak{M}_2$ ([2, Satz 2] angewandt auf $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_1\cup\mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{G}_1\cap\mathfrak{G}_2=1$). Die Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{L}_1/\mathfrak{M}_1$ oberhalb $\mathfrak{G}_1$ ist daher projektiv zur Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{R}_1/\mathfrak{S}_1$ von $\mathfrak{G}_1$. Das ist ein Widerspruch. Es gilt $\mathfrak{A}=(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{G}_1)\cup(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{G}_2)$ für alle subnormalen Untergruppen $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$. Ferner ist $(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B})\cap\mathfrak{G}_i=(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{G}_i)\cap(\mathfrak{B}\cap\mathfrak{G}_i)$ und, weil die Abbildungen $\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}\cap\mathfrak{G}_i$ Verbandshomomorphismen sind, $(\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B})\cap\mathfrak{G}_i=(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{G}_i)\cup(\mathfrak{B}\cap\mathfrak{G}_i)$ für alle Subnormalteiler $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{G}$. Die Verbandsverknüpfungen werden demnach komponentenweise ausgeführt. $s\mathfrak{G}$ ist isomorph zum direkten Produkt $s\mathfrak{G}_1\times s\mathfrak{G}_2$.

Wir geben noch eine Anwendung unseres Hilfssatzes. Ein Element a eines Verbandes L heißt *neutral* in L, wenn für beliebige Elemente x, y aus L der von a, x, y erzeugte Teilverband distributiv ist.

Satz 2. *Es sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe mit endlicher Kompositionsreihe. Der Subnormalteiler $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$ ist genau dann neutral in $s\mathfrak{G}$, wenn für jeden Subnormalteiler $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{G}$ gilt: Keine abelsche Kompositionsfaktorgruppe zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}$ (zwischen $\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$) ist isomorph zu einer Kompositionsfaktorgruppe zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}$ (zwischen $\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}$). Ist $\mathfrak{G}$ auflösbar, dann ist jeder in $s\mathfrak{G}$ neutrale Subnormalteiler charakteristisch in $\mathfrak{G}$.*

M. Curzio hat für auflösbare endliche Gruppen nachgewiesen, daß diese Bedingung notwendig ist, falls $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}$ normal ist in $\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}$ [1, Theor. IV].

Beweis. 1. $\mathfrak{A}$ sei neutral in $s\mathfrak{G}$. Dann ist keine Kompositionsfaktorgruppe oberhalb $\mathfrak{A}$ projektiv zu einer Kompositionsfaktorgruppe unterhalb $\mathfrak{A}$ [2, Satz 3]. Unser Hilfssatz besagt, daß dann keine abelsche Kompositionsfaktorgruppe zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}$ existieren kann, die isomorph ist zu einer Kompositionsfaktorgruppe zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}$.

2. Wir setzen umgekehrt diese Bedingung voraus. Angenommen, es gibt eine Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ oberhalb $\mathfrak{A}$, die projektiv ist zu einer Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$ unterhalb $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ ist abelsch [3, (3.5)]. Wir betrachten eine Kette von Kompositionsfaktorgruppen $\mathfrak{H}_0/\mathfrak{K}_0=\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}_1/\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{H}_r/\mathfrak{K}_r=\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$, in der je zwei aufeinanderfolgende Kompositionsfaktorgruppen transponiert sind. Es gilt $\mathfrak{H}_0\cap\mathfrak{A}=\mathfrak{K}_0\cap\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{H}_r\cap\mathfrak{A}\neq\mathfrak{K}_r\cap\mathfrak{A}$. Es sei i die kleinste der Zahlen $1, \ldots, r$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{H}_i\cap\mathfrak{A}\neq\mathfrak{K}_i\cap\mathfrak{A}$. Dann ist $\mathfrak{H}_{i-1}\cap\mathfrak{A}=\mathfrak{K}_{i-1}\cap\mathfrak{A}$. Da $\mathfrak{H}_{i-1}/\mathfrak{K}_{i-1}$ und $\mathfrak{H}_i/\mathfrak{K}_i$ transponiert sind, gilt $(\mathfrak{H}_{i-1}=\mathfrak{H}_i\cup\mathfrak{K}_{i-1}$ und $\mathfrak{K}_i=\mathfrak{H}_i\cap\mathfrak{K}_{i-1})$ oder $(\mathfrak{H}_i=\mathfrak{H}_{i-1}\cup\mathfrak{K}_i$ und $\mathfrak{K}_{i-1}=\mathfrak{H}_{i-1}\cap\mathfrak{K}_i)$. Wir betrachten zunächst den ersten Fall. Dann ist $\mathfrak{H}_i\cap\mathfrak{A}\leqq\mathfrak{H}_{i-1}\cap\mathfrak{A}=\mathfrak{K}_{i-1}\cap\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}_i\cap\mathfrak{K}_{i-1}=\mathfrak{K}_i$ enthalten. Daraus folgt $\mathfrak{H}_i\cap\mathfrak{A}=\mathfrak{K}_i\cap\mathfrak{A}$, also ein Widerspruch. Mithin gilt $\mathfrak{H}_i=\mathfrak{H}_{i-1}\cup\mathfrak{K}_i$ und $\mathfrak{K}_{i-1}=\mathfrak{H}_{i-1}\cap\mathfrak{K}_i$. Weil $\mathfrak{K}_i$ maximaler Normalteiler von $\mathfrak{H}_i$ ist und $\mathfrak{H}_i\cap\mathfrak{A}>\mathfrak{K}_i\cap\mathfrak{A}$ gilt, so ist $\mathfrak{H}_i\cap\mathfrak{A}/\mathfrak{K}_i\cap\mathfrak{A}$ eine zu $\mathfrak{H}_i/\mathfrak{K}_i$ transponierte Kompositionsfaktorgruppe von $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{H}_i\cap\mathfrak{A}/\mathfrak{K}_i\cap\mathfrak{A}$ liegt zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{H}_{i-1}\cap\mathfrak{A}=\mathfrak{K}_{i-1}\cap\mathfrak{A}\leqq\mathfrak{K}_i\cap\mathfrak{A}$ und ist projektiv zur Kompositionsfaktorgruppe $\mathfrak{H}_{i-1}/\mathfrak{K}_{i-1}$ zwischen $\mathfrak{H}_{i-1}$ und $\mathfrak{H}_{i-1}\cap\mathfrak{A}\leqq\mathfrak{K}_{i-1}$. Das widerspricht unserer

Voraussetzung. Folglich ist keine Kompositionsfaktorgruppe oberhalb $\mathfrak{A}$ projektiv zu einer Kompositionsfaktorgruppe unterhalb $\mathfrak{A}$. Daher ist $\mathfrak{A}$ neutral in $s\mathfrak{G}$ [2, Satz 3]. Die in Klammern gesetzte Aussage folgt aus dem Hilfssatz (c).

3. Ist $\mathfrak{G}$ auflösbar und $\mathfrak{A}$ neutral in $s\mathfrak{G}$, dann ist $\mathfrak{A}$ als oberer Kern des Verbandshomomorphismus $\mathfrak{B} \to \mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}$ von $s\mathfrak{G}$ charakteristisch in $\mathfrak{G}$ [3, (4.5)].

Literatur

[1] CURZIO, M.: Sui sottogruppi di composizione dei gruppi finiti. Ricerche di Mat. **7**, 265–280 (1958).

[2] TAMASCHKE, O.: Submodulare Verbände. Math. Z. **74**, 186–190 (1960).

[3] TAMASCHKE, O.: Die Kongruenzrelationen im Verband der zugänglichen Subnormalteiler. Math. Z. **75**, 115–126 (1961).

[4] WIELANDT, H.: Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen. Math. Z. **45**, 209–244 (1939).

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 24. März 1960)

Vor kurzem erschien:

Topologische lineare Räume I

Von Dr. GOTTFRIED KÖTHE,
o. Professor für angewandte Mathematik an der Universität Heidelberg

(Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Herausgegeben von R. GRAMMEL, E. HEINZ, F. HIRZEBRUCH, E. HOPF, H. HOPF, W. MAAK, W. MAGNUS, F. K. SCHMIDT, K. STEIN, B. L. VAN DER WAERDEN. Band 107)

XII, 456 Seiten Gr.-8°. 1960. DM 73,50; Ganzleinen DM 78,—

INHALTSÜBERSICHT

Grundbegriffe der allgemeinen Topologie: Der topologische Raum. Gerichtete Systeme und Filter. Kompakte Räume und Mengen. Metrische Räume. Uniforme Räume. Reelle Funktionen auf topologischen Räumen · Lineare Räume über beliebigen Körpern: Lineare Räume. Lineare Abbildungen und Matrizen. Der algebraisch duale Raum. Tensorprodukte. Lineartopologische Räume. Gleichungstheorie in E und E^*. Lokal linear kompakte Räume. Die lineare starke Topologie · Topologische lineare Räume: Normierte Räume. Topologische lineare Räume. Konvexe Mengen. Die Trennung konvexer Mengen. Der Satz von HAHN-BANACH · Lokalkonvexe Räume. Grundlagen: Definition und einfachste Eigenschaften lokalkonvexer Räume. Lokalkonvexe Hülle und Kern, induktiver und projektiver Limes lokalkonvexer Räume. Dualität. Die verschiedenen Topologien eines lokalkonvexen Raumes. Bestimmung verschiedener dualer Räume und ihrer Topologien · Topologisch-geometrische Eigenschaften der lokalkonvexen Räume: Der biduale Raum. Halbreflexivität und Reflexivität. Einige Sätze über kompakte und über konvexe Mengen. Extremalpunkte und Extremalstrahlen konvexer Mengen. Metrische Eigenschaften normierter Räume · Einige Klassen lokalkonvexer Räume: Tonnelierte Räume und Montelräume. Bornologische Räume. (F)- und (DF)-Räume. Vollkommene Räume. Gegenbeispiele · Literaturverzeichnis · Namen- und Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Archive for History of Exact Sciences

Edited by C. TRUESDELL

Editorial Board

O. BECKER, Bonn · C. B. BOYER, Brooklyn/N. Y. · M. CLAGETT, Madison/Wis. · I. B. COHEN, Cambridge/Mass. · R. J. DIJKSTERHUIS, Bilthoven · J. O. FLECKENSTEIN, Milano · S. FLÜGGE, Marburg a. d. Lahn · A. R. HALL, Los Angeles/Cal. · W. HARTNER, Frankfurt/M. · J. E. HOFMANN, Ichenhausen/Bayern · A. KOESTLER, London · A. KOYRÉ, Paris · A. LEJEUNE, Visé/Belgique · A. MAIER, Roma · V. RONCHI, Firenze · L. ROSENFELD, Copenhagen · A. SPEISER, Basel · O. SPIESS, Basel · D. J. STRUIK, Cambridge/Mass. · R. TATON, Paris · C. TRUESDELL, Bloomington/Ind. · B. L. VAN DER WAERDEN, Zürich · A. YOUSCHKEVITCH, Moscou-centre

Die Zeitschrift erscheint zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung nach Maßgabe des eingehenden Materials in einzeln berechneten Heften; fünf Hefte bilden einen Band

ZUR INFORMATION

Das „Archive for History of Exact Sciences" widmet sich der historischen Forschung auf den Gebieten der Mathematik und der exakten Naturwissenschaften, soweit sie den in diesen Gebieten üblichen Maßstäben genügt. Ziel ist die rasche Veröffentlichung von Arbeiten hervorragender Tiefe und Bedeutung. Das „Archive" trägt zur Erhellung der begrifflichen Grundlagen der Naturwissenschaften durch Erforschung ihres geschichtlichen Werdens bei: Entwicklung des mathematischen Denkens und der exakten Naturerkenntnis. Neben der Mathematik und den Theorien der exakten Wissenschaften wird auch die experimentelle Naturwissenschaft berücksichtigt.
Die Sprachen des „Archive" sind deutsch, englisch, französisch, italienisch, spanisch und lateinisch.

Volume 1/Number 1
106 Seiten Gr.-8°. 1960. DM 19,60

INHALTSVERZEICHNIS

A Program toward Rediscovering the Rational Mechanics of the Age of Reason. By C. TRUESDELL, Bloomington/Ind. · Anfänge des euklidischen Axiomensystems. Von Á. SZABÓ, Budapest.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz A G., Würzburg
Printed in Germany